



## Aproximació a la matemàtica egípcia

Didàctica, aplicacions i mètodes

Pere García Ruiz

*Universitat Oberta de Catalunya*

Màster interuniversitari de Mediterrània antiga

Especialitat: Pròxim Orient i Egipte

Treball final de Màster — Curs 2015-2016/1

Tutor: David Rull Ribó



# Índex de continguts

<b>1. Introducció</b>	<b>1</b>
1.1. Recerca desenvolupada i objectius del treball	2
1.2. Material i mètodes	2
1.3. Marc teòric i conceptual en què es desenvolupa la recerca	3
1.4. Desenvolupament de programes informàtics d'ajuda	4
<b>2. Antecedents històrics</b>	<b>5</b>
2.1. La matemàtica com a fonament de la civilització	5
2.2. Testimonis dels autors clàssics sobre els coneixements matemàtics egipcis	6
2.3. Possibles connexions amb la matemàtica mesopotàmica	9
2.4. Testimonis amb temàtica matemàtica: papirs Rhind, Moscou, Rull de Cuiro i paper Berlín	10
2.5. Caràcter pedagògic dels textos matemàtics egipcis	12
<b>3. Característiques de la matemàtica egípcia</b>	<b>13</b>
3.1. Codificació escrita de les magnituds numèriques	14
3.2. Unitats de mesura emprades als papirs	15
3.3. El que no diuen els papirs: operacions implícites que no es detallen	15
<b>4. Aritmètica bàsica amb nombres naturals: suma, resta, multiplicació i divisió</b>	<b>16</b>
<b>5. Fraccions</b>	<b>19</b>
5.1. Aplicacions del sistema egipci de fraccions unitàries	20
5.2. Les fraccions de l'Ull d'Horus	21
5.3. Aritmètica de fraccions: 5.4 suma, 5.5 resta, 5.6 multiplicació i 5.7 divisió	22
5.8. Operacions amb fraccions i nombres vermells	23
5.9. Completar a la unitat o a $2/3$	24
5.10. Continuitat de la tradició egípcia de fraccions unitàries	25
5.11. Aplicacions pràctiques al món actual	26
<b>6. Àlgebra</b>	<b>27</b>
6.1. Procediments algebraics mitjançant l'aritmètica	28
6.2. Cerca d'una incògnita (equivalent a l'equació de primer grau)	28
6.3. Cerca de dues incògnites (equivalent a un sistema d'equacions, una d'elles quadràtica)	29
6.4. Teorema de Pitàgores	31
6.5. Procediment teòric per al càlcul d'arrels quadrades	33
6.6. Altres aplicacions matemàtiques del paper Rhind: repartiments proporcionals, regles de tres i progressions	34
6.7. Avaluació de la qualitat de la producció: el <i>pesu</i>	38
<b>7. Geometria</b>	<b>38</b>
7.1. Càlcul de superfícies de figures elementals	39
7.2. Aproximació als càlculs de figures circulars sense el nombre $\pi$	40
7.3. Aplicacions geomètriques avançades: superfície d'una semiesfera i volum d'un tronc de piràmide	42
7.4. Dimensions i inclinació de la piràmide: el <i>seked</i>	43
<b>8. Recerca pràctica: anàlisi informàtica de la taula <math>2/n</math> del recte del Paper Rhind i altres taules</b>	<b>45</b>
8.1. Importància de la taula del recte del paper Rhind	45
8.2. Algoritme voraç	46
8.3. Anàlisi de la taula $2/n$ del paper Rhind	48
8.4. Anàlisi informàtica de la taula dels 9 primers nombres dividits per 10 del paper Rhind	54
8.5. Anàlisi informàtica de la taula de multiplicació de fraccions del problema 61 del paper Rhind	55
8.6. Anàlisi informàtica dels valors unitaris del Rull de Cuiro	56
<b>9. Conclusions</b>	<b>58</b>
9.1. Desenvolupament del treball	58
9.2. Línies d'investigació per aprofundir en l'estudi del tema	59
9.3. Consideracions finals	59
<b>10. Annexos</b>	<b>61</b>
10.1. Plana inicial de la pàgina web associada	61
10.2. Resultats de l'anàlisi informàtica de la taula $2/n$ del paper Rhind	62
<b>11. Bibliografia</b>	<b>67</b>

# 1. Introducció

Ubicat al llarg de les ribes del Nil, Egipte està considerat com una de les primeres àrees del món on es va desenvolupar una cultura i una civilització estables i avançades respecte als assentaments humans del Neolític precedent.

A mida que una societat va creixent en complexitat necessita registres i càlculs per organitzar-se. Per això, ja des de l'inici dels temps faraònics, a Egipte es va desenvolupar un enfocament pràctic de les matemàtiques per controlar béns i inventaris, predir esdeveniments cíclics, mesurar terrenys i realitzar els càlculs necessaris per aixecar les magnífiques construccions monumentals que han perdurat en el temps (Kline, 1992:44). No és casual, doncs, que els primers testimonis històrics de càlculs geomètrics i algebraics que ens han arribat es remunten a començaments del II mil·lenni aC i provinguin de Mesopotàmia i d'Egipte.

Tot i que tradicionalment s'ha considerat la matemàtica babilònica com a més avançada (Kline, 1992:46), la dificultat de treballar amb un sistema numèric barreja de decimal i sexagesimal fa que aquesta depengui en gran part de la utilització de taules per al seu desenvolupament. Per la seva banda, l'ús d'una base decimal per part de la matemàtica egípcia, ja documentada cap al 2700 aC, estableix un precedent que arriba fins a l'actualitat. També cal remarcar la influència dels mètodes egipcis de càlcul sobre la posterior civilització grega. Segurament per això els historiadors clàssics parlen de les capacitats operatives de càlcul dels antics egipcis en termes molt favorables.

Els nostres coneixements sobre matemàtica egípcia provenen sobretot de dos papirs: Rhind (c. 1650 aC) i Moscou (c. 1890 aC), als quals ens referirem d'ara endavant com a pRhind i pMoscou respectivament, tots dos amb intenció clarament didàctica. En aquests documents hi figuren diversos problemes de tipus aritmètic, geomètric i algebraic, i alguna taula de suport als càlculs. També hi trobem altra informació addicional sobre aquesta disciplina en testimonis artístics i epigràfics, així com en altres papirs més reduïts o en pitjor estat de conservació. L'apartat 2.4 (pàgines 10–11) ens mostra una taula amb la llista dels textos més rellevants sobre aquest particular.

A l'antic Egipte la matemàtica es va aplicar a la vida quotidiana per a resoldre problemes concrets. Per això se centra en casos pràctics i omet els plantejaments teòrics. Amb aquesta aritmètica empírica es calculaven mesures de terrenys, temporització astronòmica i episodis cíclics, quantitats de materials diversos i queviures i, sobretot, es determinava la manera més eficient i equitativa per pagar els serveis prestats als treballadors (Kline, 1992:44). Per això el càlcul amb fraccions, plantejat amb l'operativa i les limitacions de l'època, té un paper molt rellevant que arriba fins als nostres dies en forma d'estudis i articles relatius al còmput i les propietats dels nombres racionals de numerador unitari.

Amb aquests antecedents, en el present Treball Final de Màster abordem l'estudi de la coherència i la manera de plantejar els càlculs de la matemàtica egípcia. Per assolir aquest objectiu s'exposen els mètodes antics emprats en els càlculs i es complementen amb programes informàtics que permeten reproduir-los, aplicant tant els valors que trobem als problemes didàctics dels papirs de referència com altres de nous.

Les dades obtingudes de la recerca i la seva anàlisi s'exposen en forma d'assaig, tenint ben present com a rerefons el que diu la literatura existent sobre el tema, sobretot les obres de referència que comentarem a l'apartat 1.3 (pàg. 3), juntament amb l'opinió de d'historiadors de la matemàtica com Katz, Neugebauer, Ifrah i Boyer.<sup>1</sup> Per la nostra banda, hem abordat la qüestió amb una anàlisi informàtica detallada que ha intentat aportar un enfocament original, així com determinar noves línies d'investigació per ampliar coneixements. Per aconseguir aquesta fita, els següents apartats d'aquesta secció detallen tant el marc teòric com la proposta metodològica que hem seguit.

---

<sup>1</sup> Katz (2009), Neugebauer (1969), Ifrah (2007) i Boyer (1990 i 2011).

## 1.1. Recerca desenvolupada i objectius del treball

L'objectiu general d'aquest treball és determinar les capacitats operatives de la matemàtica egípcia a l'hora de complir amb la seva tasca d'eina útil per al funcionament de la societat. A part de reproduir els càlculs dels problemes dels papirs amb els nostres programes informàtics, s'ha posat a prova l'exactitud i la precisió de les taules de fraccions presents als papirs.

El resultat de la recerca es comenta a la secció 8 del treball.<sup>2</sup> En el cas concret de la taula  $2/n$  del Recte del pRhind, tal com es pot comprovar a partir dels resultats tabulats als apartats 10.2.1 i 10.2.5,<sup>3</sup> només l'anàlisi en profunditat de les dades ens ha portat un temps de càlcul de gairebé 40 hores en un potent ordinador actual.

## 1.2. Material i mètodes

Donat el caràcter empíric i de recerca del projecte, la proposta metodològica que permet avaluar els objectius esmentats suara s'ha centrat sobretot en l'anàlisi quantitativa dels resultats obtinguts. No obstant això, la descripció de les tècniques matemàtiques emprades durant la història de l'Egipte faraònic, les limitacions de l'entorn conceptual que les envolta, així com l'aparent manca de marc teòric i d'evolució al llarg dels mil·lennis, s'han abordat des del punt de vista de l'anàlisi qualitativa.

La metodologia emprada ha consistit en els passos següents:

- determinació dels procediments matemàtics coneguts per la civilització egípcia a partir de la bibliografia existent sobre el tema, que analitza el reduït nombre de papirs trobats sobre aquesta disciplina.
- complementació d'aquesta recerca mitjançant articles especialitzats apareguts a revistes de matemàtiques, i que aprofundeixen en certs aspectes concrets.
- reproducció dels procediments matemàtics antics mitjançant l'elaboració de programes d'ordinador breus i individualitzats que realitzen els càlculs de la mateixa manera.
- les aplicacions informàtiques s'han dut a terme en llenguatge de programació **Python 2.7**, sistema de programació d'alt nivell i de propòsit general. Amb suport per gairebé tots els sistemes operatius, Python és ideal a l'hora de crear un codi compacte i força entenedor. A més, es tracta d'una eina de programari lliure i de codi obert. Els detalls sobre la instal·lació del programari i l'execució de les aplicacions es facilita a la pàgina web associada que detallem tot seguit.
- per facilitar l'accés a tothom que vulgui comprovar el funcionament dels programes esmentats, aquests s'han ubicat en la següent pàgina web:

[http://www.peregarcia.cat/m\\_egipte.htm](http://www.peregarcia.cat/m_egipte.htm)

Des d'una plana general es pot accedir a les corresponents a les diferents aplicacions disponibles. A cada secció, a part d'accedir als programes, es faciliten les explicacions pertinents sobre cadascun d'ells, així com una o més captures de pantalles que mostren el seu funcionament.

Des de l'inici del projecte hem deixat clar que un cop finalitzat, presentat i avaluat el treball, aquest lloc d'internet romandrà actiu per temps indefinit.

A l'apartat 10.1 (pàg. 61) d'annexos del treball fem constar també la captura de pantalla de la plana inicial del lloc web associat, que ens mostra les opcions de programari disponibles.

- els programes realitzats s'han utilitzat per analitzar el grau de precisió dels procediments emprats pels antics egipcis. Per fer-ho s'han establert uns criteris d'exactitud i d'idoneïtat que ens han permès avaluar les solucions documentades als papirs i comparar-les amb les calculades mitjançant les eines modernes. En absència de normes conegudes sobre el tema, la pauta per avaluar la idoneïtat de les propostes s'ha basat en termes de senzillesa i de facilitat de càlcul per part dels escribes.

<sup>2</sup> veure pàgines 45–57 on es comenta l'anàlisi informàtica del les taules dels papirs.

<sup>3</sup> el temps d'anàlisi es mostra a la pàg. 62, mentre que la seva progressió figura a la gràfica de la pàg. 66.

- a part de comentar certs problemes i de proposar-hi alternatives al seu desenvolupament, el treball ha aprofundit especialment en l'estudi de les taules de desplegament de fraccions unitàries que mostren els papirs. Els resultats s'interpreten des d'un punt de vista matemàtic i es presenten de manera tabulada en diversos fulls de càlcul d'Excel que es mostren als apartats corresponents.

### 1.3. Marc teòric i conceptual en què es desenvolupa la recerca.

Les principals obres de referència sobre el tema són les següents:

BUFFUM CHACE, Arnold (1927). "*The Rhind Mathematical Papyrus, Vol I*", Mathematical Association of America, Oberlin.

CLAGETT, Marshall (1999). "*Ancient Egyptian Science, vol III: Ancient Egyptian Mathematics*", American Philosophical Society, Philadelphia.

GILLINGS, Richard J. (1982). "*Mathematics in the Time of the Pharaohs*", Dover Publications, Mineola, New York.

ROBINS, Gay & SHUTE, Charles (1987). "*The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*", Dover Publications, New York.

De l'obra de Buffum Chace hem seguit l'operativa de càlcul per comentar diversos problemes aritmètics i geomètrics, així com les taules del pRhind analitzades. També ha resultat d'utilitat a l'hora d'entendre el plantejament literari del text i el mètode d'ensenyament que aplega el document. Per la seva banda, el treball de l'historiador de la ciència Marshall Clagett, emmarcat en un estudi complet de la ciència egípcia, aporta una completa visió de conjunt sobre la disciplina, ja que inclou tan les seves interpretacions pròpies com els punts de vista i els raonaments dels autors precedents.

Quant al llibre de Richard Gillings, el seu plantejament detallat sobre els procediments matemàtics, així com l'extensió del seu estudi a gairebé tots els testimonis escrits coneguts ha estat d'especial utilitat a l'hora d'analitzar problemes, operacions i taules que no figuren al pRhind. És una llàstima que una part dels seus càlculs, obtinguts per mitjans informàtics de finals dels anys 60, no sigui completa, tot i que les seves interpretacions siguin correctes.

La darrera d'aquestes obres de referència (Robins i Shute, 1987), com el llibre de Buffum Chace, es limita a l'estudi del pRhind, amb una exposició molt detallada dels càlculs del seu contingut, i que ha resultat de gran utilitat a l'hora d'entendre els procediments matemàtics que reproduïm als programes informàtics de suport.

Com es pot deduir pels anys de publicació, excepte el manual de Marshall Clagett, la majoria són força antics. De fet, el llibre d'aquest autor s'emmarca en un compendi més extens que abasta els coneixements disponibles sobre ciència i tecnologia egípcies, i és força dependent del treball de Buffum Chace, obra de referència en la matèria. Tots dos es dediquen a traduir i llistar de manera descriptiva els procediments matemàtics expressats als problemes del pRhind, sense entrar en massa detall en els fonaments matemàtics en què es basen.

D'altra banda, en tractar la disciplina des d'una perspectiva diacrònica i global, les obres generals sobre Història de les matemàtiques es limiten a facilitar nocions elementals sobre matemàtica egípcia, descrivint breument mètodes i aplicacions, sense aprofundir massa ni en els seus fonaments ni en la seva utilitat pràctica. Si volem obtenir informació addicional sobre les bases matemàtiques de certs aspectes concrets relatius a l'aritmètica egípcia hem de recórrer als articles especialitzats, sovint massa teòrics i allunyats del context històric de referència. Altres particularitats de la matemàtica egípcia, com les implicacions algebraïques implícites, les aplicacions sobre geometria o altres operacions que s'esmenten però no s'expliquen, no han estat massa estudiades.

Amb els programes de suport s'ha elaborat una proposta pràctica que permet a qui ho desitgi realitzar càlculs a la manera egípcia, de forma ràpida i entenedora, i amb una visualització detallada de les dades. Les aplicacions també són útils a l'hora de verificar la precisió assolida pels antics egipcis de manera manual, així com detectar millores en les solucions presents als papirs.

Cal remarcar el paper rellevant del programa d'anàlisi de fraccions (**fe\_analisi.py**), disponible al lloc web. Es tracta de l'aplicació més complexa de les realitzades i, a part de complir la seva funció, subministra molta informació addicional. El fet de mostrar les factoritzacions i les relacions entre els nombres integrants dels desenvolupaments de fraccions pot ésser útil a l'hora de realitzar recerques sobre nombres racionals, així com d'elaborar hipòtesis i detectar regularitats en els càlculs.

Finalment, a partir de les dades informàtiques obtingudes, a l'apartat 8 del present treball (pàgines 45–57) aportem una reflexió crítica sobre els resultats, comparant-los amb el que diuen els papirs de referència.

#### **1.4. Desenvolupament de programes informàtics d'ajuda**

Abans de plantejar els objectius de recerca, la primera fase del treball s'ha centrat en esbrinar els procediments de càlcul dels escribes egipcis i elaborar els corresponents programes informàtics d'ajuda. Tal com he esmentat suara, per determinar l'operativa i els mètodes de càlcul dels escribes hem consultat les obres de referència sobre matemàtica egípcia que es detallen a la bibliografia, sobretot el manual de Robins i Shute (1987), i el treball de Buffum Chace (1927).

Un cop clares les passes a seguir per reproduir els càlculs objecte d'estudi, abans d'entrar en matèria en l'estudi dels papirs s'han realitzat les aplicacions informàtiques i s'ha comprovat que, en línies generals, i amb les mateixes dades que trobem en els textos originals, funcionaven satisfactòriament. De manera paral·lela s'han confeccionat els diversos apartats del lloc web de suport, que s'ha anat actualitzant a mida que avançava el desenvolupament del programari.

Cal remarcar que els programes tenen un caràcter experimental i poden presentar errors o no respondre bé davant de situacions no previstes. Per exemple, en introduir dades errònies finalitzen abruptament el seu funcionament. També es pot donar el cas que en demanar anàlisi de fraccions especialment complicades, el temps de càlcul sigui tan llarg que obligui l'usuari a avortar manualment el procés.

De totes maneres, el fet innovador de disposar d'un conjunt interessant d'eines informàtiques d'ajuda als càlculs facilita no només la comprensió de la disciplina objecte d'estudi, sinó que, fins i tot, permet ampliar i aprofundir el seu estudi. A més, el tractament de dades permet deduir hipòtesis de rellevància matemàtica en forma de teoremes aplicables, sobretot, als càlculs amb nombres racionals.

Amb els programes desenvolupats es poden abordar aspectes no tractats amb prou profunditat en estudis anteriors, com l'anàlisi detallada dels desenvolupaments de les fraccions egípcies tabulades als papirs. També es poden utilitzar per generar llistes tabulades de dades com les que els historiadors suposen que disposaven els enginyers i arquitectes de l'Egipte faraònic. No hem de perdre de vista que els papirs de què disposem són només didàctics, amb poques taules de suport i una tria intencionada d'exemples pensada per a la capacitació computacional dels escribes.

## 2. Antecedents històrics

El concepte de nombre com a entitat abstracta per part dels grups humans primitius cal emmarcar-lo en un horitzó temporal remot i paral·lel a la seva evolució com espècie. La necessitat pràctica de comptar que comporta el desenvolupament cultural fa que ja des del Neolític es trobin testimonis que proven el coneixement i l'ús de magnituds numèriques (Boyer, 1990:2). La consciència numèrica, doncs, comença amb el reconeixement abstracte d'una característica comuna a diferents objectes: el mateix nombre, que posseïa un significat independent de l'objecte físic que designava. Aquest fet, que anem adquirint des dels primers estadis cognitius de la infantesa és el primer pas per introduir les matemàtiques en la vida quotidiana (Ifrah, 2007:33).

El següent avenç significatiu és la realització de les operacions aritmètiques elementals. En efecte, el fet de sumar els nombres que representen dues agrupacions d'objectes de la mateixa categoria i obtenir-ne un total, en comptes de comptar un per un aquests objectes, és un pas important a l'hora d'establir un coneixement matemàtic pràctic i útil en les tasques del dia a dia. El mateix es pot afirmar de les altres operacions bàsiques: resta, multiplicació i divisió (Boyer i Merzbach, 2011:7). Tot i que la notació numèrica emprada no els permetés realitzar aquestes operacions amb la facilitat amb què les podem dur a terme avui dia, els conceptes bàsics i les seves aplicacions ja hi eren ben presents.

No és casualitat, doncs, que la història de la civilització occidental comenci de la mà de les civilitzacions egípcia i babilònica, que són les que van desenvolupar els primers coneixements matemàtics. Per no caure en un plantejament limitat als orígens de la civilització occidental, cal esmentar també el desenvolupament posterior de la disciplina en les civilitzacions xinesa i índia, tot i que la aportació significativa d'aquesta darrera es concretaria molts segles més tard.

### 2.1. La matemàtica com a fonament de la civilització

L'evolució organitzativa de les primeres civilitzacions humanes i el creixement de la seva complexitat van de la mà d'un increment de les seves necessitats de càlcul: mesures, inventaris, censos i recomptes en tots els àmbits: administració de la producció agrícola, treball artesanal, activitat militar... El caràcter redistributiu de l'economia egípcia, sota impuls estatal i supervisió dels Temples, es veu clarament en el sistema de repartiment d'aliments, matèries primeres i productes manufacturats. En absència de moneda l'economia i el comerç funcionaven amb unitats de referència (gra i metalls preuats) per a avaluar els intercanvis segons uns patrons fixats per l'Estat, que havia de garantir l'equitat mitjançant un sistema de pesos i mesures que apareixen constantment als papirs matemàtics (Husson i Valbelle, 1998:86). En aquest sentit, els procediments matemàtics egipcis presents als papirs objecte d'estudi són un conjunt de tècniques per resoldre els problemes pràctics de la societat en què s'emmarquen. Per això, des d'inicis del segon mil·lenni trobem aquests valuosos testimonis escrits que reflecteixen una rica i original tradició en la resolució de problemes pràctics. No és sorprenent, doncs, que l'estructura interna d'aquests textos sigui similar als plantejaments didàctics moderns.

A la cultura egípcia el càlcul va de la mà de l'escriptura, facilitant l'organització burocràtica i la programació i el control del treball (Kemp, 2004:159). En aquests àmbits el domini de l'aritmètica esdevé una eina eficaç a l'hora d'administrar un país. A més, l'aritmètica bàsica, juntament amb un coneixement elemental de la geometria permeten abordar les tasques topogràfiques i constructives que tan magnífics testimonis han deixat. Magnituds, formes i mides són els universals matemàtics que, juntament amb conceptes com la proporció i la simetria, ajuden a entendre i reproduir les formes naturals que observem al nostre voltant, i que es concreten en les obres artístiques i arquitectòniques.

Els dipositaris exclusius del coneixement matemàtic a Egipte eren els escribes, professionals amb autoritat i prestigi social derivats de la concepció teocràtica de la societat egípcia, segons la qual el sentit de la vida humana és el treball al servei de les divinitats i del sobirà, el poder del qual emana de la seva filiació divina. El fet de pertànyer a aquest elitista i reduït grup que aplegava el saber de l'època, emmarcat en el rerefons teocràtic esmentat, explica la transcendència de la missió d'aquests professionals, expressada de manera solemne en el pròleg del pRhind, que tot seguit traduïm de l'obra d'Arnold Buffum (1927:48):

“Càlcul exacte per a entrar en el coneixement de les coses existents i de tots els obscurs secrets i misteris. Aquest llibre va ésser copiat l'any 33, en el quart mes de l'estació de la inundació, sota la majestat del rei de l'Alt i el Baix Egipte, A-user-Rê, dotat de vida, en semblança als escrits antics fets en el temps del rei de l'Alt i el Baix Egipte, Ne-Ma'et-Rê'. És l'escriba A'h-mose qui copia aquest escrit.”

## 2.2. Testimonis dels autors clàssics sobre els coneixements matemàtics egipcis

Sobre el paper d'Egipte en l'origen de les matemàtiques disposem d'un nombre reduït de referències de fonts clàssiques que fan èmfasi en la geometria i el paper dels sacerdots com a dipositaris de la saviesa del país. El prestigi de la civilització egípcia és tal que els historiadors grecs sovint li atribueixen la formació dels seus filòsofs més prestigiosos.

Segons relata Plató al *Fedre*, els egipcis atribuïen un origen mitològic diví a les matemàtiques, de la mà de Toth, l'escriba dels déus i patró d'aquesta professió:

“SÓCRATES. — Pues bien, oí que había por Náucratis, en Egipto, uno de los antiguos dioses del lugar al que, por cierto, está consagrado el pájaro que llaman Ibis. El nombre de aquella divinidad era el de Theuth. Fue éste quien, primero, descubrió el número y el cálculo, y, también, la geometría y la astronomía, y, además, el juego de damas y el de dados, y, sobre todo, las letras. Por aquel entonces, era rey de todo Egipto Thamus, que vivía en la gran ciudad de la parte alta del país, que los griegos llaman la Tebas egipcia, así como a Thamus llaman Ammón. A él vino Theuth, y le mostraba sus artes, diciéndole que debían ser entregadas al resto de los egipcios. Pero él le preguntó cuál era la utilidad que cada una tenía, y, conforme se las iba minuciosamente exponiendo, lo aprobaba o desaprobaba, según le pareciese bien o mal lo que decía.”

[Platón, *Fedro* 274, c-d]

Quant al naixement de la geometria, Heròdot afirma que obeïa a la necessitat pràctica de tornar a delimitar els terrenys inundats després de les inundacions periòdiques del Nil (Kline, 1992:41):

“Els sacerdots m'explicaren que [Sesotris] havia repartit el país entre tots els egipcis, que havia donat a cadascú un lot quadrangular de terres de cultiu i que n'havia obtingut els seus propis ingressos, perquè ordenà que tothom li pagués un tribut cada any. Quan el riu rebaixava el lot de terra d'algú, l'afectat anava a trobar el rei, el qual enviava homes que ho investiguessin i mesuressin la disminució de la superfície; així des d'aleshores abonaria en tal proporció el tribut imposat. Em sembla que per a aquesta comesa es va inventar aleshores la geometria, que arribà després a Grècia.” [Heròdot, *Història*, II, 109]

Provada ja la utilitat pràctica d'aquesta disciplina, Aristòtil remarca el caràcter especulatiu i lúdic de la investigació matemàtica per part d'una suposada elit sacerdotal ociosa (Katz, 2009:35). Es tracta d'una observació interessant que expressa la concepció especulativa i contemplativa predominant de la matemàtica grega, marcant distàncies amb qualsevol consideració utilitària:

“A partir de este momento y listas ya todas las ciencias tales, se inventaron las que no se orientan al placer ni a la necesidad, primeramente en aquellos lugares en que los hombres gozaban de ocio: de ahí que las artes matemáticas se constituyeran por primera vez en Egipto, ya que allí la casta de los sacerdotes gozaba de ocio.” [Aristóteles, *Metafísica* 981b, 20-24]

De totes maneres, aquesta afirmació es contradiu amb la realitat, ja que des dels seus inicis la matemàtica que es desenvolupa entre egipcis, babilonis i altres civilitzacions del Llevant mediterrani persegueix finalitats pràctiques ben concretes, fent èmfasi en l'administració, l'arquitectura i l'astronomia, tal com esmenta Flavi Josep a l'obra *Contra Apió*:

“En cuanto a los primeros filósofos griegos que trataron las cosas celestes y divinas, como Ferécides de Siros, Pitágoras y Tales, escribieron muy poco y todo el mundo reconoce que fueron discípulos de los egipcios y de los caldeos.” [Flavio Josefo, *Contra Apión* 2, 14]

Un testimoni interessant sobre la geometria egípcia el trobem al *Sumari d'Eudem*, inclòs al *Comentari sobre el primer llibre dels Elements d'Euclides* de Procle, filòsof neoplatònic del segle V dC. Aquest autor va tenir accés a obres històriques i crítiques sobre la matemàtica grega antiga que malauradament no ens han arribat, entre elles una història completa de la geometria hel·lènica escrita per Eudem, deixeble d'Aristòtil (Hodkin, 2005:41). En confirmar la hipòtesi d'Heròdot sobre l'origen de la geometria l'autor introdueix la figura destacada de Tales de Milet:

“Però limitant la nostra recerca a l'origen de les arts i les ciències de l'època actual, afirmem, igual que la majoria dels escriptors de la història, que la geometria va ser descobert per primera vegada entre els egipcis, motivada per les noves mesures de les seves terres. Això els era necessari perquè les crescudes del Nil esborraven les línies de demarcació entre les seves propietats. [...] Així com entre els fenicis les necessitats del comerç i l'intercanvi van esperar l'estudi acurat dels nombres, de manera similar es va produir entre els egipcis la invenció de la geometria per la raó esmentada.

Tales, que havia viatjat a Egipte, va ésser el primer a introduir aquesta ciència a Grècia. Va fer molts descobriments i va ensenyar els principis de molts altres als seus successors, abordant alguns problemes de forma general i altres més empíricament.” [Procle, *Sumari d'Eudem*, 65]<sup>4</sup>

Aquesta part final de la cita de Procle és particularment interessant perquè revela un canvi de plantejament respecte els mètodes deductius dels principis matemàtics. En efecte, independentment del bagatge matemàtic que poguessin aplegar de les civilitzacions precedents, els grecs van establir que aquest coneixement s'havia d'establir mitjançant raonaments deductius, i que les seves conclusions havien d'ésser confirmades per demostracions lògiques, en comptes de fer servir els mètodes empírics que havien dominat a la matemàtica precedent (Kline, 1992:75). Segons Neugebauer (1969:149), la matemàtica prehel·lènica es basava en la intuïció i l'operativa de prova i error. Per continuar aplicant els mateixos procediments de sempre i de la mateixa manera n'hi havia prou amb què els resultats pràctics no entressin en contradicció amb l'experiència acumulada al llarg dels segles.

Segons aquest darrer fragment de l'obra de Procle, correspondria a Tales el canvi d'enfocament en el plantejament sobre la geometria: d'empíric a deductiu. Així, segons aquest i altres testimonis, al filòsof de Milet se li atribueixen certs descobriments relacionats amb la geometria dels angles, les rectes i les superfícies que les determinen (Eggers, 1995:49). A continuació reproduïm diversos fragments que ho corroboren, així com la seva estada a Egipte, en què va adquirir fama en aplicar les seves deduccions al càlcul de l'alçada de les piràmides. El primer correspon a les *Vides i doctrines dels filòsofs més il·lustres*, de Diògenes Laerci:

“Ningú no l'instruí, llevat que va anar a Egipte i hi freqüentà els sacerdots. I Jeroni afirma que ell també mesurà les piràmides a partir de llur ombra, observant-les quan són de la mateixa grandària que nosaltres.” [Diògenes Laerci, *Vides i doctrines dels filòsofs més il·lustres*, I, 27]

---

<sup>4</sup> Tradueixo de l'anglès de l'obra de MORROW, G (1970). “*Proclus: A commentary on the first book of Euclid's Elements*”. Princeton University Press, Oxford, pp. 51-52.

Aquesta informació també l'esmenta Plini el Vell:

“La forma de mesurar l'alçada de les piràmides i altres edificis similars va ésser trobada per Tales de Milet: ell va mesurar l'ombra en el moment en què és igual al cos que la provoca.”  
[Plini el Vell, *Història Natural*, XXXVI, 82]<sup>5</sup>

L'explicació sobre la proporcionalitat entre triangles s'entén millor en la cita de Plutarc al respecte:

“También a ti te admira [...] profundamente complacido con tu manera de medir la pirámide, ya que sin ningún trabajo y sin utilizar instrumento alguno, sino colocando de pie un bastón en el límite de la sombra que proyectaba la pirámide, habiéndose formado dos triángulos con la intersección de los rayos del sol, demostraste que la sombra guardaba con la otra sombra la misma relación que la pirámide con el bastón.” [Plutarc, *Banquete de los Siete Sabios*, 147a]

Per il·lustrar el magisteri d'egipcis i babilonis sobre la matemàtica grega inclourem dos breus fragments de la *Vida pitagòrica* del filòsof neoplatònic Iàmblic de Calcis (s. III–IV dC) on, respecte a Pitàgores, esmenta Tales com el seu preceptor. Al text es parla de l'estada d'ambdós filòsofs a Egipte i del posterior periple de Pitàgores al regne persa successor de la tradició babilònica:

“[...] se trasladó por mar con Ferécides, junto a Anaxíandro, el filósofo de la naturaleza, y junto a Tales, en Mileto. [...] Y especialmente Tales lo acogió complacido [...] porque superaba con mucho la fama que le había precedido. Le hizo partícipe de cuantos conocimientos pudo, y [...] le instó a que se embarcara rumbo a Egipto y se relacionara especialmente con los sacerdotes de Menfis y Diópolis. En efecto, de ellos obtuvo aquello por lo que la gente lo tiene por sabio. Afirmaba que él no estaba dotado, ni por la naturaleza ni por la práctica, de tantas facultades como observaba en Pitágoras. Así, por todo ello, se difundió la buena nueva: si Pitágoras se relacionaba con los sacerdotes mencionados, sería el más divino y el más sabio por encima de todos los hombres.” [Iàmblico, *Vida pitagòrica* 2, 11-12]

“Desde allí frecuentó todos los santuarios con muchísima diligencia y con un riguroso estudio, siendo admirado y apreciado por los sacerdotes y profetas con que se relacionaba y, recibiendo un aprendizaje muy detallado sobre cada asunto [...] visitó a todos los sacerdotes, sacando provecho, junto a cada uno, de sus particulares conocimientos.

Veintidós años permaneció en Egipto en centros sagrados, estudiando astronomía y geometría e iniciándose [...], hasta que, apresado por las tropas de Cambises, fue llevado a Babilonia. Allí se relacionó gustoso con los magos [...] y aprendió perfectamente el culto de los dioses, llegando junto a ellos a la cumbre de la aritmética, de la música y de las demás disciplinas y, habiendo transcurrido otros doce años, regresó a Samos a la edad, aproximadamente, de cincuenta y seis años.” [Iàmblico, *Vida pitagòrica* 4, 18-19]

Al present treball parlarem més endavant del teorema de Pitàgores (apartat 6.4, pàg. 31) i esmentarem el triangle elaborat amb una corda a partir de la terna pitagòrica (3, 4, 5) de dotze nusos i que era utilitzat pels agrimensors egipcis per determinar angles rectes (Kline, 1992:43). Doncs bé, aquesta referència historiogràfica prové de Climent d'Alexandria, autor eclesiàstic del segle II, que a la seva obra miscel·lània de temes filosòfics *Stromata* esmenta de manera indirecta l'experiència de Demòcrit d'Abdera entre els egipcis:

“He peregrinado por más tierras que cualquier hombre de mi tiempo investigando en los sitios más apartados; he visto los cielos y las tierras de múltiples regiones, he oído multitud de hombres doctos. Pero nadie de entre ellos me ha superado ni en la composición ni en la demostración ni tan siquiera los *tenedores de cuerdas* que entre los egipcios se llaman *harpedonaptai* con los cuales he vivido ochenta años en el exilio.” [Climent d'Alexandria, *Stròmata*, I, 15]<sup>6</sup>

<sup>5</sup> En absència de traduccions al català i al castellà d'aquest apartat concret de Plini el Vell, tradueixo del text llatí original: “*mensuram altitudinis earum omnemque similem deprehendere invenit Thales Milesius umbram metiendo, qua hora par esse corpori solet*”. Obtingut del lloc web:

[http://penelope.uchicago.edu/Thayer/L/Roman/Texts/Pliny\\_the\\_Elder/36\\*.html](http://penelope.uchicago.edu/Thayer/L/Roman/Texts/Pliny_the_Elder/36*.html), consultat el 12 de gener de 2016.

<sup>6</sup> Cita copiada de Vernet, 1979:145.

### 2.3. Possibles connexions amb la matemàtica mesopotàmica

Malgrat la seva proximitat geogràfica i la seva contemporaneïtat, tant els historiadors de les matemàtiques com els estudiosos d'aquesta disciplina en les seves especialitats egípcia i babilònica han mantingut sempre la independència absoluta de les dues tradicions. Els arguments per defensar aquest posicionament es basen en les diferències més notables entre els dos sistemes conceptuals: l'adopció de bases numèriques dispars i alfabet, els procediments aritmètics i les tècniques per desenvolupar-los completament diferents (Gherveghese, 2011:121). També hi va influir notablement el context cultural en què es van realitzar les troballes documentals més importants, cap a finals del segle XIX, època en què es valoraven especialment les qüestions de prova i exactitud a l'hora d'avaluar els conceptes matemàtics (Ritter, 2000:132).

A principis del segle XXI estem en disposició de valorar les matemàtiques d'aquests dos pobles des d'un nou enfocament que valori la seva operativa i la seva efectivitat dins del seu context, com a disciplina al servei de les necessitats pràctiques de la societat, i intentant cercar els paral·lelismes entre els seus plantejaments. Recents estudis (Friberg, 2005) han posat de manifest que, salvant les diferències entre els sistemes numèrics i la notació escrita, les tradicions matemàtiques d'Egipte i Mesopotàmia presenten nombrosos punts en comú.

L'estudi dut a terme per Friberg (2005) mostra paral·lelismes evidents entre els continguts i les estructures dels problemes dels papirs egipcis i les tauletes babilòniques. Els tòpics en qüestió serien els següents (Friberg, 2005:102):

Referència Egipte	Referència Babilònia	Tòpic
pRhind, problema 79	M. 7857	Suma d'una progressió geomètrica de 5 termes
pRhind, problemes 28–29	11 YBC 4652 # 9	Problemes de divisions encadenades
pRhind, problema 64	P.UC 32160 # 211 Str. 362 #I	Progressió aritmètica amb diferència fixa de termes
pRhind, problema 40	YBC 9856 & VAT 8522 # 2	Progressió aritmètica amb diferència variable de termes
pRhind, problema 53	Str 364 & IM 43996	Problemes geomètrics amb triangles
pMoscou, problema 14	Tauleta descoberta recentment	Problema geomètric de piràmide truncada

De tot plegat es pot afirmar amb prudència l'existència probable d'interrelacions significatives entre les matemàtiques del Regne Mitjà d'Egipte i Babilònia. Un estudi de textos matemàtics demòtics posteriors (s. III aC), confirma la hipòtesi de Friberg segons la qual una part significativa dels temes i els mètodes de la matemàtica babilònica tardana també eren coneguts a l'Egipte Ptolemaic (Gherveghese, 2011:185). També cal remarcar les relacions més o menys constants entre les dues civilitzacions tal com s'ha demostrat amb la troballa de la correspondència diplomàtica en forma de tauletes cuneïformes de Tell el-Amarna, datada cap al segle XIV aC (Kline, 1992:36).

Un altre àmbit en què la ciència egípcia va rebre notables influències de la babilònica va ésser l'astronomia i la seva vessant astrològica, fins al punt d'ésser coneguda aquesta darrera com a ciència "caldea". Aquesta tradició astronòmica, juntament amb la corresponent aportació egípcia en qüestions com el calendari, va tenir una influència decisiva sobre l'astronomia hel·lenística (Oppenheim, 1977:309). Així, en la darrera fase de la matemàtica egípcia amb Alexandria com a centre cultural, el nou impuls cultural grec, impregnat del ric substrat precedent va afavorir l'aparició de les individualitats matemàtiques i astronòmiques més importants de l'antiguitat clàssica com Arquímedes, Ptolomeu, Diofant, Heron o Eratóstenes (Gherveghese, 2011:122).

## 2.4. Breu descripció dels testimonis amb temàtica matemàtica

La següent taula s'ha elaborat a partir dels textos de Clagett (1999), Gillings (1982) i Katz (2007).

Nom document	Datació aproximada	Lloc de la troballa	Ubicació actual	Contingut matemàtic
<b>Papir Rhind</b>	1650 aC	Prop del Ramesseum (Tebes)	Museu Britànic (Londres)	84 problemes d'aritmètica bàsica i geometria elemental, taula $2/n$ i altres taules breus
<b>Papir Moscou</b>	1850 aC	Tebes	Museu de Belles Arts Puixkin (Moscou)	25 problemes d'aritmètica bàsica i geometria
<b>Rull de Cuiro</b>	1650 aC	Prop del Ramesseum	Museu Britànic (Londres)	26 sumes de fraccions unitàries
<b>Papir Berlín</b>	2000 aC	El-Lahun	Neues Museum (Berlín)	2 problemes geomètrics d'equacions simultànies, una de segon grau
<b>Papir Lahun</b>	1800 aC	El-Lahun	University College (London)	6 fragments poc llegibles amb una part de la taula $2/n$ , una progressió aritmètica i la terna pitagòrica (3, 4, 5)
<b>Tauletes de fusta Akhmim</b>	s. XX aC	Akhmim	Museu d'El Caire	Multiplicacions amb fraccions de l' <i>Ull d'Horus</i> Divisions de fraccions
<b>Papir Reisner</b>	s. XXI aC	Naga ed-Deir	Boston Museum of Fine Arts	Registre d'obres i activitats d'unes drassanes
<b>Papir Anastasi</b>	s. XIV aC	Deir el-Medina	Museu Britànic (Londres)	Càlculs administratius: racions de menjar, maons i homes necessaris per a la construcció
<b>Ostracon Senmut 153</b>	s. XV aC	Deir el-Bahari	Museu d'El Caire	Exercici escolar: multiplicació i suma de fraccions
<b>Ostracon Torí 57170</b>	s. XIV aC	Deir el-Medina	Museo Egizio (Torino)	Molt fragmentari: exercici matemàtic o taula
<b>Ostracon IFAO 1206</b>	s. XIV aC	Deir el-Medina	Museu d'El Caire	Càlcul de volums de materials per a una tomba

Els principals documents de temàtica matemàtica de l'antic Egipte que ens han arribat corresponen a les quatre primeres entrades de la taula anterior. Tots ells estan datats a l'època del Regne Mitjà o el Segon Període intermedi, redactats en escriptura hieràtica amb tinta de colors negre i vermell, i alguns d'ells mostren dibuixos de figures geomètriques per ajudar a entendre els problemes plantejats. Per ordre d'importància serien: el pRhind (1650 aC), el pMoscou (1850 aC), el Rull de Cuiro (1650 aC) i el papir Berlín. La resta de testimonis contenen menys informació rellevant, sovint fragmentària i difícil d'interpretar.

### 2.4.1 Papir Rhind

Es tracta del testimoni més important que ens ha arribat sobre matemàtica egípcia. Es va trobar prop del Ramesseum, a Tebes i va ésser adquirit al 1859 per l'antiquari escocès Henry Rhind, que posteriorment el va vendre al Museu Britànic de Londres, on es troba en l'actualitat, juntament amb el Rull matemàtic de Cuiro, també de la seva propietat.

Datat cap al 1650 aC (Segon Període Intermedi), el document consta de 14 peces de papir d'uns 40 cm de llargada per 32 d'amplada, dimensions estàndard per als papirs de la seva època, enganxats amb cola per formar un continu de 513 cm. Cal remarcar que al Museu Brooklyn de Nova York hi ha dos fragments petits i que 18 cm de la secció central han desaparegut (Robins i Shute, 1987:10). El text també és conegut com "papir d'Ahmes", nom de l'escriba que afirma ésser-ne l'autor i que afirma que es tracta d'una còpia d'un papir anterior.

El pRhind mostra una disposició de continguts que remarca la seva naturalesa pedagògica, amb 87 problemes matemàtics agrupats per temes i amb les corresponents solucions. El recte del papir presenta la següent disposició (Gillings, 1982:243):

- **Taula de fraccions  $2/n$ :**  $2/3, 2/5, \dots, 2/101$
- **Problemes 1–6:** Divisió de diverses barres de pa entre 10 homes
- **Problemes 23–27:** Suma i resta de fraccions
- **Problemes 24–34:** Determinació d'una quantitat desconeguda a la que se suma o resta una altra
- **Problemes 35–38:** Igual que l'anterior, però aplicat a quantitats de gra
- **Problemes 39–40:** Divisió desigual de pans entre diverses persones
- **Problemes 41–47:** Càlcul de volums d'envasos de diferents formes
- **Problemes 48–55:** Càlcul d'àrees de camps de diferents formats
- **Problemes 56–60:** Càlcul de dimensions lineals i inclinació de piràmides

Per la seva banda, el verso del document conté altres problemes que els autors qualifiquen com a miscel·lània (Buffum, 1927:100):

- **Taula auxiliar per a la multiplicació de fraccions**
- **Problema 61:** Regla per al càlcul de  $2/3$  del recíproc de nombres parells
- **Problemes 62:** Càlcul de conversions de pes de metalls preuats
- **Problemes 63–68:** Divisió de fraccions i progressions aritmètiques
- **Problemes 69–78:** Determinació de la producció de pa o cervesa segons el *pesu*
- **Problema 79:** Suma d'una progressió geomètrica
- **Problemes 80–81:** Càlcul de mesures de gra aplicant les fraccions de l'*Ull d'Horus*
- **Problemes 82–84:** Estimacions de quantitats de menjar per alimentar aviram i bestiar
- **Problemes 85–87:** [fragmentaris] semblen registres d'inventari o consigna d'incidents

Dins de cada grup els problemes estan disposats en subgrups segons els mètodes utilitzats per a la seva resolució, i atenent a un creixent grau de complexitat (Ritter, 2000:120).

## 2.4.2 Papir de Moscou

També conegut com “Papir Golenishchev” en honor de l’egiptòleg rus que el va comprar al 1893 a Tebes. Datat cap al 1850 aC (Regne Mitjà), té una longitud molt similar a la del pRhind, però amb només un quart de la seva amplada, tan sols 8 cm (Robins i Shute, 1987:10). Des de 1912 es troba al Museu de Belles Arts Puixkin de Moscou.

El papir de Moscou mostra una disposició de continguts més anàrquica que la del pRhind, amb una disposició de problemes sense ordre aparent i amb unes explicacions menys detallades. A part de diversos problemes relatius al càlcul d’àrees, dimensions de triangles o la producció de pa o cervesa segons la seva qualitat o *pesu* (veure apartat 6.7, pàg. 40), els continguts més rellevants del text són un parell de problemes geomètrics força complexos (Gillings, 1982:246):

- **Problema 10:** Càlcul de l’àrea de la superfície d’una semiesfera
- **Problema 14:** Càlcul del volum d’una piràmide truncada

Aquests dos interessants problemes els comentarem a la secció del treball dedicada a la geometria (7.3, pàg. 42).

## 2.4.3 Rull Matemàtic de Cuiro

Es tracta d’un rull de cuiro trobat prop del Ramesseum, a Tebes i adquirit juntament amb el pRhind al 1859 per Henry Rhind. Va romandre bobinat durant més de 60 anys fins que al 1927 es va aconseguir desenrotllar-lo per mitjans químics. Datat també cap a 1650 aC (Segon Període Intermedi), el document fa uns 43 cm de llargada per 25 d’amplada. En desvetllar-se el seu contingut es van veure frustrades les expectatives de trobar-hi informació matemàticament rellevant, ja que tan sols contenia una mena d’exercici escolar, amb el desplegament de 26 fraccions unitàries copiades dues vegades (Gillings, 1982:90). A l’apartat 8.6 del treball (pàg. 56) analitzem el seu contingut, força interessant a l’hora d’esbrinar els procediments dels escribes en treballar amb quantitats fraccionàries.

## 2.4.4 Papir de Berlín

Es tracta de dos fragments de papir datats, com el pMoscou, en temps del Regne Mitjà. En aquest cas el contingut matemàtic del document consisteix en dos problemes geomètrics molt similars que es resolen mitjançant un sistema d’equacions, una de les quals és de segon grau. La solució desenvolupada és especialment interessant perquè incorpora els conceptes d’arrel quadrada, tot i que sense facilitar o explicar un mètode per calcular-la, i les ternes pitagòriques (Clagett, 1999:249). A la secció 6.3 (pàg. 29) expliquem amb detall un d’aquests exemples.

## 2.5. Caràcter pedagògic dels textos matemàtics egipcis

A l’antic Egipte la formació d’un escriba no es limitava al domini de l’escriptura en les seves múltiples variants, també requeria un cert domini dels textos i dels procediments matemàtics. Aquesta capacitat era important a l’hora de treballar amb documents econòmics i administratius (Gherveghese, 2011:180). Per això els papirs matemàtics que ens han arribat són un compendi de problemes amb les seves solucions, i el seu contingut està orientat a ajudar aquests funcionaris en un ampli ventall de situacions de la vida diària que se’ls podien presentar a l’hora d’exercir la seva professió: determinació de superfícies per a l’agricultura, volums de graners i materials necessaris per dur a terme una construcció, càlcul de racions per als treballadors, per alimentar el bestiar o relatius a l’elaboració del pa i la cervesa, etc.

El caràcter pedagògic dels textos es fonamenta en que tots els problemes que hi trobem s'ajusten al mateix esquema:

- Al text el narrador s'adreça al destinatari en segona persona: “suma..., multiplica..., divideix...”, “pren el doble i la sisena part”, “aleshores trobes l'àrea...”, dictant-li directament la seqüència fixa d'operacions a realitzar.
- Els valors emprats als càlculs dels problemes no són arbitraris, sinó que estan triats amb cura amb la finalitat de centrar l'atenció de l'alumne en entendre el desenvolupament de les operacions.
- La mateixa solució és l'algoritme, és a dir, els passos necessaris per arribar a la conclusió desitjada, explicats amb detall encara que siguin molt senzills. Quan és necessari es faciliten els nombres auxiliars vermells per ajudar a trobar la solució.
- Normalment, després de la solució es facilita una comprovació numèrica de la seva correcció.

L'esquema rígid dels textos, la gradació dels plantejaments quant a la seva dificultat creixent i l'absència de comentaris sobre els fonaments dels mètodes utilitzats, s'ajusten al que Ritter (2000:123) anomena “lògica de la transmissió”, que determina el contingut i l'organització dels textos existents en funció de la seva utilitat pràctica, sense entrar en la justificació ni l'origen dels coneixements plantejats a l'alumne.

### 3. Característiques de la matemàtica egípcia

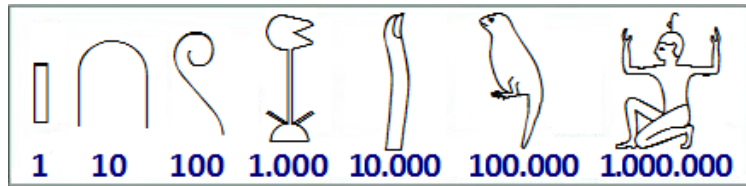
La matemàtica egípcia és fonamentalment empírica. El protagonisme del càlcul aritmètic és, doncs, absolut, fins i tot en els plantejaments geomètrics, ajustant-se les necessitats de la societat egípcia (Ritter, 2000:131). Els papirs contenen només taules o llistes de problemes solucionats. Tal com hem esmentat, en destaquen els papirs Rhind i Moscou, de clara orientació pedagògica bàsica. Els coneixements que hi trobem podrien ésser molt més antics i van ésser plenament vigents durant tota la història d'Egipte, fins l'arribada de la matemàtica grega (Boyer i Merzbach, 2011:19). No coneixem, doncs, si els escribes o altres especialistes coneixien procediments més sofisticats de càlcul. El que sí queda clar de les operacions aritmètiques que s'hi detallen és que els seus mecanismes eren complexos i, en el cas de les fraccions, força enrevessats.

A l'hora de resoldre els problemes matemàtics necessaris per desenvolupar les seves activitats, els egipcis no van tenir cap necessitat de descobrir axiomes o trobar relacions entre conjunts de nombres, recorrent sovint a la força bruta i els mètodes de prova i error per resoldre problemes. En la seva defensa hem d'admetre que es tracta d'una pràctica que, en molts sentits, seguim utilitzant avui dia per abordar problemes matemàtics d'especial complexitat. Això no vol dir que no aprofitessin les regularitats detectades a l'hora de treballar amb fraccions de denominadors que compartien divisors. Tal com veiem en l'anàlisi de la taula  $2/n$  del pRhind (apartat 8.3, pàgs. 48–53), si un patró concret de descomposició en fraccions unitàries funcionava, s'aplicava als successius valors que compartien els mateixos trets. D'aquesta manera s'obtenien noves solucions que, a més, en ésser múltiples de les anteriors, facilitaven els processos aritmètics per agrupació.

A Egipte, com a Babilònia, las matemàtiques es van aplicar amb notable èxit a l'astronomia. La regularitat dels moviments dels cossos celestes serveix per confeccionar calendaris útils per a les necessitats agrícoles i la celebració de les festivitats religioses. Aquesta qüestió era particularment rellevant a Egipte, ja que era indispensable per predir les inundacions del Nil i planificar amb èxit les activitats agrícoles i ramaderes (Katz, 2009:135). De fet, el nostre calendari es basa en càlculs egipcis d'època hel·lenística i va ésser adoptat pel món romà l'any 45 aC a instàncies de Juli Cèsar (Kline, 1992:32 i Neugebauer, 1969:82).

### 3.1. Codificació escrita de les magnituds numèriques

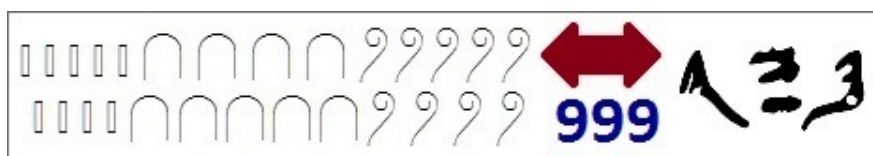
**Sistema jeroglífic:** base 10, no posicional. El valor es calcula per addició dels termes mostrats. Consta de 7 símbols bàsics per representar unitats, desenes, centenes... fins a la imatge de l'home agenollat amb els braços alçats que s'associa a una quantitat d'un milió, o bé, infinit. La necessitat de realitzar els signes jeroglífics de manera artística i impecable feia la seva execució lenta i feixuga. Per això les seves qualitats estètiques es reservaven a les obres d'art i determinades representacions de textos solemnes i religiosos.



**Sistema hieràtic:** Paral·lelament a l'escriptura jeroglífica es va desenvolupar una forma cursiva simplificada dels seus símbols anomenada hieràtica, més pràctica per als usos quotidians de correspondència, registres i burocràcia de temples i palaus, i que reduïa cada símbol a uns quants traços senzills per un procés d'estilització (Kline, 1992:36). Per la seva facilitat i rapidesa d'ús, ja des del Regne Antic, va ésser la forma predominant en els escrits religiosos i funeraris, així com en textos legals i pràctics (matemàtics, mèdics...). Quant a la representació numèrica, comparteix els mateixos trets de l'anterior, tot i que presenta una codificació més compacta, complexa i difícil de dominar, ja que hi ha 36 símbols diferents que apleguen les 9 primeres unitats, desenes, centenes i unitats de milers (Katz, 2009:4):

1	10	100	1000
2	20	200	2000
3	30	300	3000
4	40	400	4000
5	50	500	5000
6	60	600	6000
7	70	700	7000
8	80	800	8000
9	90	900	9000

L'avantatge d'aquesta notació es pot comprovar, per exemple, en la representació del nombre 999, que aplega 27 símbols jeroglífics mentre que la seva transliteració hieràtica només en requereix tres:



### 3.2. Unitats de mesura emprades als papirs

Per facilitar l'estudi dels problemes que exposarem més endavant, a continuació mostrem una taula amb les principals unitats de mesura emprades quotidianament a l'antic Egipte i que apareixen als problemes dels papirs, la majoria de les quals eren vigents des dels temps del Regne Antic (Robins i Shute, 1987:13 i Buffum, 1927:31-34):

Tipus de mesura	Nom (unitat principal en negreta)	Equivalència egípcia	Equivalència mètrica
longitud	<b>colze reial</b>	7 pams — 28 dits	52,5 cm
	pam	4 dits	7,5 cm
	dit	1/4 pam	1,875 cm
	<i>khet</i>	100 colzes	52,5 m
superfície	<b>setat</b> <sup>7</sup>	1 <i>khet</i> quadrat = 10.000 colzes quadrats	2756.25 m <sup>2</sup> , aprox. 1/4 Ha
volum	<b>hekat</b> <sup>8</sup>	1/30 de colze cúbic	4,8 l
	<i>hin</i> <sup>9</sup>	1/10 <i>hekat</i>	480 cm <sup>3</sup>
	<i>ro</i>	1/320 <i>hekat</i>	15 cm <sup>3</sup>
	<i>khar</i>	2/3 de colze cúbic = 20 <i>hekat</i>	96 l
pes	<b>deben</b>		91 g
	<i>kite</i>	1/10 <i>deben</i>	9,1 g

### 3.3. El que no diuen els papirs: operacions implícites que no es detallen

Un tret característic dels textos estudiats és que els seus autors de tant en tant aporten dades que ens sorprenen i que en cap cas justifiquen. Per exemple, al papir de Berlín (apartat 6.3, pàg. 29) l'autor aporta el resultat d'una arrel quadrada de suma de fraccions que és una mica sorprenent (Gillings, 1992:162), sobretot comparant-ho amb la facilitat del nostre sistema de notació:

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \rightarrow [\text{notació actual}] \rightarrow \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

Si ja l'aritmètica bàsica amb fraccions és prou complexa, com ho van fer per obtenir aquest resultat? Probablement ho hem de plantejar a l'inversa, calculant el valor inicial a partir del resultat final, o bé disposant d'alguna mena d'ajuda en forma de taules de quadrats.

També observem en molts problemes d'aritmètica de fraccions com l'escriba facilita uns nombres vermells auxiliars que ajuden a simplificar els càlculs (apartat 5.8, pàg. 23). Doncs bé, el càlcul d'aquests nombres s'ajusta als concepte actual de *mínim comú divisor*, i implica un coneixement dels factors que integren els nombres que no apareix enlloc als textos. De la mateixa manera, en analitzar els desenvolupaments de la taula 2/n del pRhind detectem uns patrons que obeeixen a plantejaments teòrics força complexos que no es revelen als alumnes.



<sup>7</sup> Unitat emprada en la mesura de terrenys.

<sup>8</sup> Normalment, les fraccions de la unitat de volum *hekat* s'expressen en termes de fraccions de l'Ull d'Horus i *ro* (1/320) (Robins & Shute, 1987:40).

<sup>9</sup> Capacitat estàndard de les gerres de cervesa.

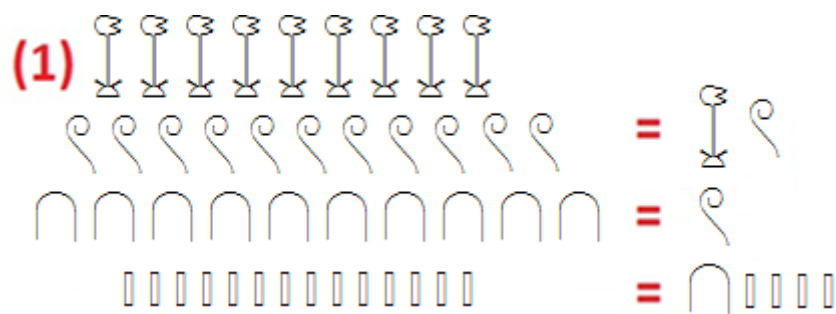
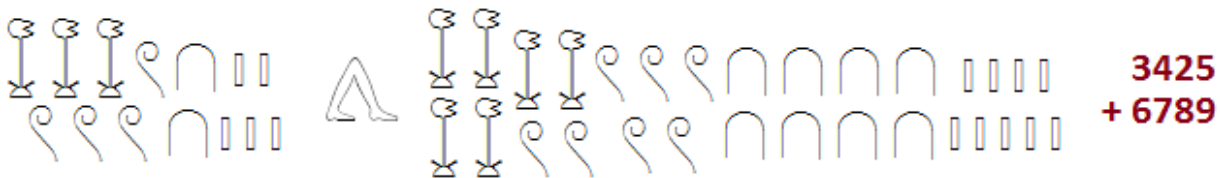
Quant a certes operacions geomètriques de càlcul de superfícies i volums, l'escriba va dictant els passos successius per a obtenir el resultat final, aplicant la fórmula correcta que deixa caure sense dir el perquè ni com s'ha arribat a aquesta conclusió.

#### 4. Aritmètica bàsica amb nombres naturals

Com veurem a continuació, l'aritmètica de nombres naturals no és gaire complexa, excepte en el cas de la divisió no exacta, que requereix un treball addicional d'aproximació amb fraccions. Quant a la notació dels càlculs, als papirs normalment no s'utilitzava cap mena de signe de puntuació per indicar quin tipus d'operació aritmètica es realitzava, manifestant-ho de manera verbal explícita o amb una explicació sobre el càlcul que es duia a terme (Robins i Shute, 1987:7), tot i que en algunes representacions jeroglífiques podem trobar els símbols ,  per indicar la suma i la resta. Si els peus s'orientaven en la direcció de l'escriptura significaven suma, en cas contrari, resta (Kline, 1992:41).

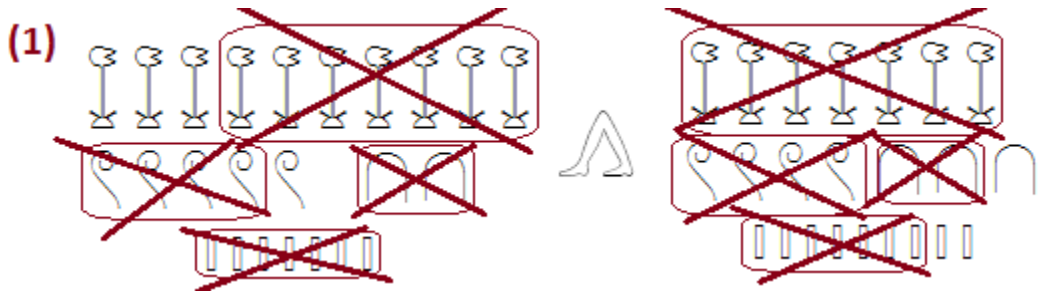
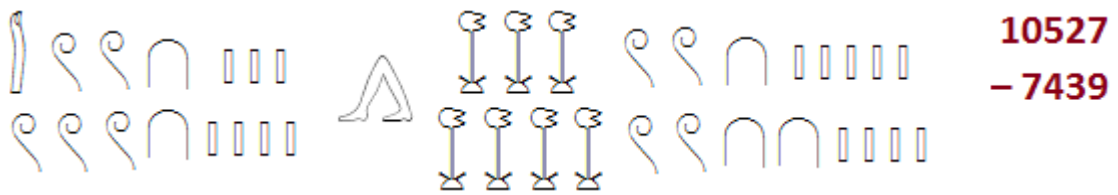
##### 4.1. Suma (programa: suma.py)

Normalment es duria a terme aplegant els símbols de tots dos sumands, per posteriorment simplificar-los. Amb petites quantitats es faria mentalment.



##### 4.2. Resta (programa: resta.py)

El procediment per a la resta seria molt similar al de la suma. Amb petites quantitats també es faria mentalment. Per a quantitats més altes cal desplegar els símbols de desenes, centenes, milers... quan s'escau, per anul·lar en el minuend els corresponents al subtrahend. Com en el cas de la suma, el resultat final també se simplifica.

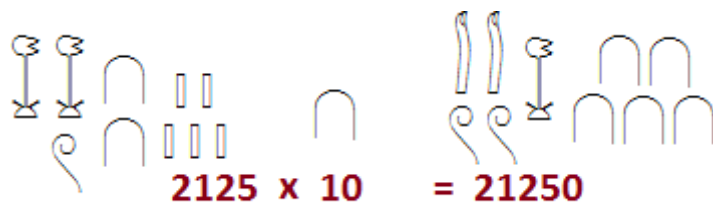


### 4.3. Multiplicació (programa: multiplicacio.py)

Emprada en nombroses situacions comptables: càlculs geomètrics de superfícies i volums, establiment d'equivalències de béns de valors diversos... A l'antic Egipte era una operació senzilla i pràctica. Aprofitant que tot nombre natural es pot descompondre com a suma de potències de dos, el mètode consisteix a sumar les quantitats duplicades de les potències de dos que intervenen en la seva factorització. Tot i que l'ordre és indiferent, per simplificar el nombre d'operacions a realitzar es tria com a multiplicand el més petit dels nombres que intervenen a l'operació. Exemples:

29 X 35	1 35	22 X 35	<del>1</del> 35
	<u>2</u> 70		2 70
	4 140		4 140
	8 280		<del>8</del> 280
	16 560		16 560
	-----		-----
	29 <b>1015</b>		22 <b>770</b>

Òbviamment, la multiplicació per 10, 100, 1000... es fa de manera trivial substituint cada símbol per el corresponent a la potència de 10 immediatament superior:



### 4.4. Divisió (programa: divisio.py)

La divisió es considera com a operació recíproca de la multiplicació. De fet, el plantejament consisteix a trobar el nombre que hem de multiplicar pel divisor per assolir el dividend. Per exemple: 885 / 15 s'interpreta com 15 x ? = 885

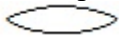


## 5. Fraccions

En treballar amb nombres enters i realitzar divisions entre ells aviat ens n'adonem que sovint els quocients no són exactes. En aquest punt és on intervenen les fraccions, amb la finalitat de guanyar precisió en els càlculs. Abans d'entrar en el complex entrellat de les fraccions egípcies hem de remarcar que el concepte modern de nombres racionals expressats amb notació  $p/q$  i les operacions aritmètiques associades a aquesta categoria numèrica són relativament recents, ja que apareixen a Europa cap a l'Edat Moderna (Boyer i Merzbach, 2011:254). Així, doncs, per aproximar-nos al concepte de fracció de la matemàtica egípcia cal assumir les connotacions epistemològiques que comporta la seva pròpia definició.

El concepte egipci de fracció deriva de la divisió d'un nombre per un altre, operació que es pot resoldre amb una part entera i una de fraccionària que s'ha d'expressar obligatòriament mitjançant una suma de fraccions unitàries. En el context de repartiment en què s'emmarca, una expressió com  $2/7$  no té cap sentit dins la mentalitat egípcia. En trobar-se davant d'una operació com aquesta, l'escriba ha de recórrer a una taula que la tingui resolta en forma de fraccions unitàries ( $1/4 + 1/28$ ) com la del pRhind, o bé arribar a uns valors equivalents realitzant la divisió a mà.

Les operacions amb fraccions unitàries són una característica pròpia i original de la tradició matemàtica egípcia, fet que no s'observa en cap altra civilització. L'ús de magnituds fraccionàries és tan important que al pRhind només sis dels vuitanta-set problemes que conté no les utilitzen.

Per expressar les fraccions d'un nombre, els escribes egipcis empraven el signe jeroglífic de la boca  ( $r$ ) sobre la xifra a remarcar que, en aquest context, denotava una part de la quantitat determinada. Exemples:

$$\begin{array}{c} \text{Boca} \\ \text{VI} \end{array} = \frac{1}{6} \qquad \begin{array}{c} \text{Boca} \\ \text{VI} \\ \text{IIIIII} \end{array} = \frac{1}{224}$$

Diverses fraccions d'ús freqüent com  $1/2$ ,  $2/3$  i  $3/4$  disposaven de signes especials; el darrer cas,  $3/4$ , d'aparició més tardana (Ifrah, 2007:417):

$$\begin{array}{c} \text{Boca} \\ \text{II} \end{array} = \frac{1}{2} \qquad \begin{array}{c} \text{Boca} \\ \text{III} \end{array} = \frac{2}{3} \qquad \begin{array}{c} \text{Boca} \\ \text{IIII} \end{array} = \frac{3}{4}$$

Tot i que als papirs les operacions matemàtiques no semblen complicades i es resolen amb relativa facilitat, a la vida real la qüestió devia ésser força més complexa. La metodologia emprada amb l'ús de fraccions unitàries porta temps i requereix entrenament. És possible, doncs, que la mateixa naturalesa de la notació numèrica i la complicació dels freqüents i feixucs càlculs amb fraccions siguin la raó per la qual la matemàtica egípcia no va arribar a desenvolupar una aritmètica ni un àlgebra avançades. Els escribes egipcis, al igual que els babilonis, tampoc es van adonar de la naturalesa dels nombres irracionals. Pera això, les arrels quadrades senzilles que trobem als problemes dels papirs es van expressar sempre, encara que fos de manera aproximada, en termes de nombres enters i fraccions (Kline, 1992:39).

La pràctica egípcia habitual d'utilitzar l'aritmètica de fraccions unitàries, probablement va ésser de gran influència en les administracions hel·lenística i romana, i així es va estendre encara més per altres regions de l'Imperi Romà (Neugebauer, 1969:72).

A l'hora d'interpretar els valors dels desenvolupaments de fraccions egípcies de les taules dels papirs hem de tenir en compte certs criteris de selecció (Gillings, 1982:49):

- Es fan servir fraccions unitàries col·locades en ordre decreixent, i sense repetir valors.
- El desplegament en dos termes es considera millor que el de tres, que a la seva vegada es prefereix al de quatre. No s'admeten desenvolupaments de més de quatre termes.
- S'ha d'intentar que la primera fracció tingui el mínim valor possible, però s'accepten valors una mica superiors si això permet que els següents siguin més reduïts.
- Per norma general i per facilitar els càlculs, es prefereixen les fraccions amb denominadors parells davant les senars.
- No s'admeten denominadors majors de 1000.

Aquests pautes obeeixen a la necessitat de simplificar al màxim el nombre de termes i els valors emprats en les operacions, ja que, com veurem, són força complicades i és fàcil cometre errors. Per això en molts problemes dels papirs matemàtics on intervé l'aritmètica de fraccions l'autor facilita nombres auxiliars vermells com a ajuda.

Basant-nos en els criteris anteriors **definirem com a desenvolupament òptim aquell que els seus termes siguin els mínims possibles**, criteri que es pot aplicar a la seva suma. Així, ho reflectim als programes informàtics de suport. Per exemple, en sotmetre el valor  $2/45$  de la taula del Recte del pRhind a la nostra anàlisi informàtica (`fe_analisi.py`) obtenim:

$2/45 = 1/23 + 1/1035$	> suma: 1058	[algoritme voraç]
$2/45 = 1/24 + 360$	> suma: 384	
$2/45 = 1/25 + 225$	> suma: 250	
$2/45 = 1/27 + 135$	> suma: 162	
$2/45 = 1/30 + 90$	> suma: 120	[valor del pRhind]
$2/45 = 1/35 + 63$	> suma: 98	
$2/45 = 1/36 + 60$	> suma: 96	[desenvolupament òptim]

## 5.1. Aplicacions del sistema egipci de fraccions unitàries

Si l'ús d'una notació tan particular de nombres racionals ens sorprèn avui dia, per què es va convertir en un puntal de la matemàtica egípcia? Probablement això obeeix a la necessitat de repartir quantitats de manera equitativa a l'hora de realitzar tot tipus de transaccions. No oblidem que aquesta civilització no utilitzava la moneda i realitzava els pagaments amb tot tipus de béns. Així, si es tracta de repartir 3 barres de pa entre 4 homes, el més normal per nosaltres seria donar tres quartes part de barra als tres primers i tres peces d'un quart al darrer. És clar que tots reben el mateix, i aquest sistema de repartiment funciona molt bé amb objectes de naturalesa incomptable com la cervesa, l'oli, el gra o la llana. Fins i tot es podria admetre en l'exemple exposat de la barra de pa. Però es revela com a injust o inequitatiu en molts altres casos, per exemple, en repartir una peça de tela, amb què alguns beneficiaris es podrien confeccionar un vestit, mentre que un altre amb la mateixa quantitat, en obtenir peces més petites s'hauria de conformar amb fer-se uns mocadors. Per tot això el desplegament en fraccions unitàries no té rival a l'hora de realitzar un repartiment equitatiu, ja que totes les assignacions són exactament iguals:  $3/4 = 1/2 + 1/4$ .

L'ús omnipresent de  $2/3$  en el sistema egipci de fraccions trenca la coherència del repartiment equitatiu que li aporten les fraccions unitàries. Això ho podem veure en el següent exemple, corresponent al problema 6 del pRhind, i que planteja el repartiment de 9 barres de pa entre 10 homes. En aquest cas l'autor es limita a facilitar la solució al problema, presentant el resultat:  $2/3 + 1/5 + 1/30$  i comprovant que en multiplicar-lo per 10 s'obté el valor 9 inicial.

Aplicant el nostre sistema fraccionari 9 homes rebrien 9/10 de barra, gairebé sencera, mentre que el darrer obtindria 9 trossets de 1/10 de barra. La proposta del paper, tot i que més equitativa, tampoc és del tot satisfactòria. Si 9 homes reben 2/3 de barra, no en queden altres 2/3 per al desè. Així, si a aquests 9 homes se'ls assigna la quantitat calculada, el desè haurà de rebre la resta, consistent en 4 peces: 1/3 + 1/3 + 1/5 + 1/30 (Rising, 1974:93). És curiós que aquest cas concret ens mostri una partició no equitativa. Fent servir el programa d'anàlisi desenvolupat per a aquest projecte obtenim una solució òptima i totalment equitativa, prescindint del valor 2/3 i tenint en compte només fraccions unitàries:

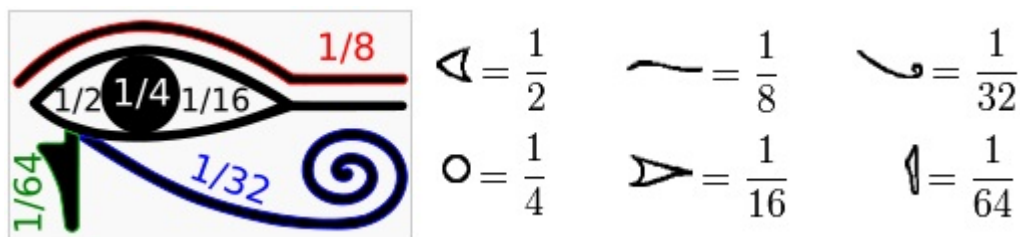
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

L'ús de 2/3 també complica el repartiment de barres de pa en altres problemes del pRhind. La traducció de Buffum (1927:61-62) mostra els següents resultats (solució del paper) que, en els problemes 5 i 6 també són millorables. De totes maneres, a part de la dificultat d'assignar una trentena part d'una barra de pa, les nostres estimacions aporten valors equitatius i òptims:

Prob. Rhind	Repartiment	Solució del paper	Solució òptima calculada amb 2/3	Solució òptima calculada
4	7 barres entre 10 homes	2/3 + 1/30	2/3 + 1/30	1/2 + 1/5
5	8 barres entre 10 homes	2/3 + 1/10 + 1/30	2/3 + 1/12 + 1/20	1/2 + 1/5 + 1/10
6	9 barres entre 10 homes	2/3 + 1/5 + 1/30	2/3 + 1/6 + 1/15	1/2 + 1/3 + 1/15

### 5.2. Les fraccions de l'Ull d'Horus

Per representar fraccions en mesures agràries de superfície i volum es va utilitzar un sistema fraccionari basat en les divisions consecutives de la unitat entre dos. Per a representar els principals signes de les fraccions es van fer servir les parts que componien el jeroglífic de l'Ull d'Horus. Les parts que integren l'ull són sis: el blanc de l'esquerra [1/2], l'iris [1/4], la cella [1/8], el blanc de la dreta [1/16], el signe del faraó [1/32] i la llàgrima [1/64] (Ifrah, 2007:418).



Cal remarcar que qualsevol nombre racional menor que la unitat es pot representar de manera exacta (si el seu denominador és una potència de dos pertanyent a l'ull) o força aproximada fent servir només aquest conjunt limitat de fraccions unitàries:

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \text{en canvi, } \frac{3}{5} \text{ és aproximat: } \frac{3}{5} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \quad (\text{amb un error del 3\%})$$

L'ús d'aquest tipus de fraccions basades en les potències de dos és especialment útil a l'hora de multiplicar o dividir per dos. En el primer cas, el valor queda reduït a la meitat, mentre que en el segon és el doble:

$$\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

### 5.3. Aritmètica de fraccions

Tot i les dificultats pràctiques derivades de la seva complexitat, la matemàtica egípcia afronta l'aritmètica de fraccions amb total naturalitat. Les quatre operacions bàsiques: suma, resta, multiplicació i divisió es recolzen en els mateixos principis que s'apliquen als nombres enters: duplicar, decuplicar, dividir per dos..., el problema és que l'operativa per resoldre els càlculs pot arribar a complicar-se notablement. Per això als papirs hi trobem taules d'ajuda que faciliten l'agrupació de termes i la simplificació d'uns resultats que es poden fer servir per realitzar nous càlculs.

### 5.4. Suma (programa: `sum_frac.py`)

La suma de fraccions és molt similar a la d'enters: es juxtaposen els sumands i se simplifiquen els resultats perquè siguin el més senzill i compacte possible. Prenem, per exemple,  $2/15 + 4/45$ :

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} \text{ (Rhind)} + \frac{4}{45} = \frac{2}{45} + \frac{2}{45} = \frac{1}{30} + \frac{1}{90} + \frac{1}{30} + \frac{1}{90} \text{ (Rhind)}$$

$$\text{Tot junt: } \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{45} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$$

### 5.5. Resta (programa: `rest_frac.py`)

Com en el cas dels enters, el procediment per a la resta seria molt similar al de la suma, anul·lant en el minuend els valors corresponents al subtrahend. Com a l'exemple anterior el resultat final també se simplifica. Posarem com a exemple els mateixos valors anteriors,  $2/15 - 4/45$ :

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} \text{ (Rhind)} - \frac{4}{45} = \frac{2}{45} + \frac{2}{45} = \frac{1}{30} + \frac{1}{90} + \frac{1}{30} + \frac{1}{90} \text{ (Rhind)}$$

$$\text{Tot junt: } \frac{1}{10} + \frac{1}{30} - \frac{1}{30} - \frac{1}{30} - \frac{1}{90} - \frac{1}{90} = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} - \frac{1}{45} = \frac{1}{15} - \frac{1}{45} = \frac{2}{45} = \frac{1}{30} + \frac{1}{90} \text{ (Rhind)}$$

### 5.6. Multiplicació (programes: `mul_frac.py` i `mul_frac_num.py`)

La multiplicació de fraccions requereix una operativa més o menys complicada en funció de la naturalesa dels factors que intervenen. Així, si el denominador d'una fracció unitària és parell, multiplicar-la per dos equival a dividir el denominador per dos:  $2 \times 1/20 = 1/10$ , en canvi, si és senar la cosa es complica, i aquí és on demostra la seva utilitat la taula  $2/n$  del pRhind, que ja té un grapat de càlculs tabulats.

Per multiplicar dos desenvolupaments de fraccions amb diversos denominadors, tal com es pot comprovar amb els nostres programes de suport, s'ha de multiplicar cadascun dels termes del multiplicand per tots els del multiplicador i sumar els resultats, realitzant posteriorment les simplificacions oportunes. Per il·lustrar el procediment, posarem per exemple la següent multiplicació:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

Com que  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \rightarrow$  el resultat final és:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

### 5.7. Divisió (programes: `div_fracs.py` i `div_fracs_num.py`)

Un cop vistes les dificultats per treballar amb fraccions unitàries en els casos precedents hem de suposar que el cas de la divisió encara ha d'ésser més complicat. De fet, als papirs només es contemplen els casos més senzills: divisions de nombres per fraccions o d'aquestes per nombres. Tots dos casos són gairebé trivials: dividir una fracció unitària per un nombre enter equival a multiplicar el seu denominador pel nombre en qüestió, mentre que dividir un nombre enter per una fracció unitària genera un enter producte del denominador pel nombre:

$$\frac{a}{\frac{1}{n}} = a \times n \quad \dots \quad \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a \times n}$$

La divisió d'una seqüència de fraccions unitàries per una altra requereix d'un procediment molt més elaborat, probablement fora de l'abast de la matemàtica egípcia. No obstant això, una altra manera de realitzar la divisió de sumes de fraccions seria trobar l'invers del divisor i multiplicar-lo pel dividend. Exemple pràctic:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20}$$

$$\text{com que } \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{resultat} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

### 5.8. Operacions amb fraccions i nombres vermells

En certs problemes del pRhind ens trobem amb uns nombres auxiliars escrits amb tinta vermella que s'utilitzaven com a ajuda per simplificar una part de les operacions a realitzar. Normalment es tractava del *mínim comú múltiple* dels nombres principals i el seu ús feia més senzills alguns dels càlculs, sobretot en el cas de multiplicació i divisió de fraccions (Gillings, 1982:81). Tot i que des del punt de vista actual el fet de treballar amb aquests nombres sembla una complicació innecessària, s'ha de tenir en compte que el sistema egipci de fraccions unitàries esdevenia més complex a mida que els denominadors augmentaven, per això s'intentava que fossin el més petits possible. Per il·lustrar l'ús d'aquests peculiars nombres auxiliars examinarem un parell d'exemples:

- **Problema 13** del pRhind: multiplica  $\frac{1}{16} + \frac{1}{112}$  per  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

L'autor del papir tria l'auxiliar **28**. Probablement sigui més senzill fer-ho amb **32**:

	x	amb auxiliar <b>28</b> (pRhind)	amb auxiliar <b>32</b>
1	$\frac{1}{16} + \frac{1}{112}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32} + \frac{1}{224}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$	$1 + \frac{1}{7}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{64} + \frac{1}{448}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$
		$= 3 + \frac{1}{2}$	$= 4$
	<b>Resultat = <math>\frac{1}{8}</math></b>	$(3 + \frac{1}{2}) / 28$	$4 / 32$

Evidentment, és pot calcular la solució sumant les fraccions resultants del producte:  $1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/112 + 1/224 + 1/448$ , però és més senzill sumar les corresponents a la multiplicació pel nombre vermell auxiliar i dividir aquest pel resultat. En aquest cas sembla que 32 és millor que 28 com a nombre vermell, ja que les fraccions resultants són menys i una mica més senzilles. També és més senzill dividir 32 per 4 que 28 per 3 + 1/2. Total: **1/8** que és la part de 32 que fa 4.

- **Problema 15** del pRhind: multiplica  $\frac{1}{32} + \frac{1}{224}$  per  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

En aquest cas l'auxiliar triat torna a ésser **28**. Probablement també sigui més senzill fer-ho amb **32**, almenys no se generen tantes fraccions a la dreta i són més senzilles. També és molt més fàcil dividir pel dos resultant que per una fracció complexa. Total: **1/16** que és la part de 32 que fa 2.

	x	amb auxiliar 28 (pRhind)	amb auxiliar 32
1	$1/32 + 1/224$	$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/8$	$1 + 1/7$
1/2	$1/64 + 1/448$	$1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/16$	$1/2 + 1/14$
1/4	$1/128 + 1/896$	$1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/43$	$1/4 + 1/28$
		$= 1 + 1/2 + 1/4$	$= 2$
	Resultat = <b>1/16</b>	$(1 + 1/2 + 1/4) / 28$	$2 / 32$

L'elecció del nombre vermell auxiliar ha d'ésser la que porti fraccions més senzilles a l'hora de realitzar els càlculs. La seva tria ha d'estar, doncs, vinculada al màxim nombre de divisors dels factors que intervenen a les operacions.

Tal com hem esmentat anteriorment, el caràcter didàctic dels papirs objecte d'estudi es reflecteix en l'acurada selecció dels valors presents als exemples proposats. A simple vista ens n'adonem de que els valors fraccionaris comparteixen divisors, i el mateix passa amb els nombres vermells proposats. D'aquesta manera, els valors obtinguts en multiplicar les fraccions són més senzills i fàcils d'agrupar posteriorment. En cas contrari els càlculs es compliquen enormement i la introducció dels nombres auxiliars vermells en comptes d'ajudar, encara pot fer més difícil trobar una solució.

## 5.9. Completar a la unitat o a 2/3

Un altre apartat del pRhind relacionat amb els nombres auxiliars vermells i la resta de fraccions és completar un grup de fraccions fins arribar a un valor, normalment 1. Així, el problema 21 del pRhind demana completar  $2/3 + 1/15$  a 1, és a dir, calcular quines fraccions s'han de sumar a  $2/3 + 1/15$  per arribar a la unitat. Es tria l'auxiliar vermell 15 perquè és el mínim comú múltiple dels dos denominadors implicats en l'operació:

$$15 \times 2/3 = 10$$

$$15 \times 1/15 = 1$$

---


$$11 \ggg 15 - 11 = 4 \ggg \text{ per a la unitat manca: } \mathbf{4/15}.$$

Del mateix pRhind obtenim que:  $2/15 = 1/10 + 1/30$ , de manera que per desenvolupar  $4/15$  cal multiplicar  $2/15$  per dos i obtenim el resultat final: **1/5 + 1/15**

Amb el programa `rest_fracs.py` ho podem resoldre fàcilment:

Cal entrar només 1 com a unitat de la primera fracció i a la segona a restar les següents parts fraccionàries:  $1/2 + 1/6$  (desplegament de  $2/3$ ) i  $1/15$ . El resultat que obtenim és  $1/4 + 1/60$ , que no

és òptim, ja que correspon al desplegament obtingut mitjançant l'algoritme voraç. De totes maneres, es pot obtenir un valor més acurat que el del paper analitzant  $4/15$  amb el nostre programa `fe_analisi.py`, que ens aporta  $1/6 + 1/10$  com a resultat òptim, una mica millor que el del text.

El mateix programa de resta de fraccions es pot utilitzar per comprovar altres dos problemes del pRhind:

nº problema	enunciat	resultat del paper	resultat del programa rest_frac.py
22	completar $2/3 + 1/30$ a 1	$1/5 + 1/10$	$1/4 + 1/20$
23	Completar $1/4 + 1/8 + 1/10 + 1/30 + 1/45$ a $2/3$	$1/9 + 1/40$	$1/8 + 1/90$

Els valors calculats pel nostre programa mostren la feblesa de l'algoritme voraç a l'hora de calcular fraccions òptimes. Si bé la primera fracció té un denominador menor, la segona és clarament desfavorable. Per resoldre aquest problema caldria incloure en tots els programes de càlcul de fraccions un mòdul basat en l'anàlisi profunda que es duu a terme en l'aplicació `fe_analisi.py` i que permetria treballar en tot moment amb fraccions òptimes. Per la seva complexitat i càrrega de codi addicional que representa, això es deixa com a futura línia d'ampliació per millorar els programes de càlcul. De totes maneres, abans del desplegament final del resultat el programa ens mostra la fracció en qüestió, que podem sotmetre al sedàs de l'anàlisi i així obtenir la solució òptima. D'aquesta manera hem trobat un millor resultat al problema 21 que acabem d'esmentar.

### 5.10. Continuïtat de la tradició egípcia de fraccions unitàries

La tradició egípcia de fraccions unitàries presenta una continuïtat en el temps que arriba fins al final de l'Edat Mitjana. Un document interessant de l'època romana i escrit en grec és el paper Akhmim, avui part de la col·lecció de Michigan, datat per mètodes paleogràfics entre els segles II–IV i que conté taules de divisions de nombres expressades en fraccions unitàries (Knorr, 1982:142). A la mateixa col·lecció també hi troben papirs posteriors (segles VII–VIII) amb taules de quocients expressades en termes de fraccions egípcies (Karpinski, 1923:21).

Una figura cabdal en la introducció de la notació numèrica posicional (*modus indorum*) i les xifres àrabs a Europa és Leonardo de Pisa (c. 1170–1250), més conegut com Fibonacci. La seva obra *Liber Abaci* (1202) mostra la utilitat pràctica d'aquest innovador sistema de numeració, que aplica a la comptabilitat, la conversió de mesures i pesos, càlculs d'interès, canvi de monedes i altres activitats basades en l'aritmètica (Kline, 1992:283). El tractat va gaudir d'una bona acollida i va canviar el panorama matemàtic europeu. Tant a la primera edició com a les revisions posteriors té un paper important el treball amb nombres fraccionaris, que es presenten sempre com a fraccions egípcies, mantenint fins i tot l'excepció de  $2/3$  que no es descompon, tal com veiem en els papirs del Regne Mitjà. A l'obra, Fibonacci descriu un mètode per obtenir els desenvolupaments unitaris dels nombres racionals que coincideix amb l'algoritme voraç descrit a l'apartat 8.2 (pàg. 46) del present treball, i fins i tot aporta taules per facilitar la descomposició en fraccions unitàries (Boyer i Merzbach, 2011:230).

A l'àmbit bizantí, els escrits dels matemàtics Planudes Màxim i Nicolaus Rhabdas del segle XIV mostren com encara s'utilitzaven les fraccions unitàries en els desenvolupaments de nombres racionals (Tannery, 1886 i Karpinsky, 1923:23). Sembla, doncs, que aquest sistema de càlcul va ésser útil durant almenys tres mil·lennis, fins que a l'Edat Moderna va ésser substituït per la notació més còmoda i assequible que ens és tan familiar (Burton, 2011:51).

## 5.11. Aplicacions pràctiques al món actual

Les fraccions unitàries juguen un rol important dins l'*aritmètica modular*, branca de la *teoria de nombres* conreada entre d'altres per Gauss, Galois, Fermat i Euler (Katz, 2009:938), i que aborda la factorització d'enters en múltiples aplicacions actuals com la codificació, la criptografia i altres activitats vinculades amb la informàtica.

Als nostres dies hi ha un gran interès per l'anàlisi dels mètodes numèrics emprats a l'antiguitat, que en el cas de les fraccions egípcies es concreta en l'estudi dels seus patrons i el càlcul dels seus desenvolupaments mitjançant procediments informàtics. Així, la teoria actual de nombres veu amb interès tot allò relacionat amb les sèries numèriques de fraccions unitàries. En aquest aspecte destaca la *conjectura d'Erdős–Graham*,<sup>10</sup> formulada al 1948 i encara per provar, que expressa qualsevol nombre racional de la forma  $4/n$  com a suma de tres fraccions unitàries (Graham, 2002:292). L'enunciat és el següent:

Per tot enter  $n \geq 2$ , existeixen enters positius  $x, y, z$  que compleixen el següent criteri:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

L'estudi de les sèries de fraccions unitàries és particularment interessant perquè moltes d'elles convergeixen en nombres enters o irracionals amb aplicacions importants en física, enginyeria, biologia, economia i finances. Per exemple, en economia les sèries geomètriques tenen moltes aplicacions com els càlculs de l'interès compost o els rèdits obtinguts mitjançant el coeficient.

Entre les sèries infinites compostes de fraccions unitàries destaquen:<sup>11</sup>

- La *sèrie harmònica*, que aplega la suma de totes les fraccions unitàries positives, i que divergeix lentament:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

- El *problema de Basilea*, que consisteix en sumar els inversos dels quadrats dels nombres naturals i que convergeix en  $\pi^2/6$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

- La *constant d'Apéry*, sèrie semblant a l'anterior però amb els inversos al cub. Aquesta sèrie intervé en el càlcul d'algunes magnituds físiques com els termes de segon i tercer ordre de la raó giromagnètica de l'electró (quocient entre el moment dipolar magnètic i el moment angular). També la trobem en les fórmules de càlcul de magnituds físiques com els calors específics de sòlids (model Debye) i la llei de Stefan–Boltzmann (radiació del cos negre):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots = \zeta(3)$$

<sup>10</sup> En matemàtiques una *conjectura* és una proposició que se suposa que és certa, però que no ha estat encara provada ni refutada. Un cop es demostra la seva veracitat, l'enunciat passa a anomenar-se *teorema* i es pot fer servir per bastir altres demostracions formals.

<sup>11</sup> WEISSTEIN, Eric W. "Harmonic Series". Al lloc web: *MathWorld — A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html>. Consultat el 10 de gener de 2016.

Al càlcul de probabilitats i estadístiques cal remarcar la *lleï de Zipf*, deduïda de manera empírica, i que explica nombrosos patrons estadístics. La seva aplicació matemàtica es fonamenta en el càlcul de fraccions unitàries.<sup>12</sup>

Quant a les aplicacions en física, les fraccions unitàries intervenen en nombroses fórmules com, per exemple, en els càlculs dels nivells d'energia del model atòmic de Bohr. A les òrbites dels electrons dins un àtom d'hidrogen aquesta magnitud és proporcional al quadrat de fraccions unitàries (Tipler, 2003:160). També al disseny de circuits electrònics hi trobem un ús pràctic per a les fraccions egípcies. Així, quan s'afegeixen resistències en paral·lel a un circuit, l'invers del resultat és la suma dels inversos del components (Robertson, 2008:36):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + [\dots]$$

Aquest procediment també serveix per una altra magnitud com la inductància quan les resistències s'afegeixen seguint el mateix esquema.

## 6. Àlgebra

Tot i que els escribes egipcis resolien els problemes plantejats als papirs mitjançant l'aplicació de principis aritmètics, trobem un reduït grup de propostes que s'ajusten a una de les branques en què subdividim la matemàtica actual: l'àlgebra. El que nosaltres coneixem com a equació lineal de primer i segon grau del tipus:

$$y = ax + b \quad \text{o} \quad y = ax^2 + bx + c$$

inclou una incògnita  $x$  que es pot comparar al concepte egipci "aha" *aHa* (quantitat o pila de...), que era el valor a trobar a partir de certes indicacions. Diversos exemples interessants els trobem als problemes 24-29 del pRhind (Buffum, 1927: 67-71). Aquests problemes són tots força similars i es mostra la seva solució amb els passos detallats que condueixen al resultat.

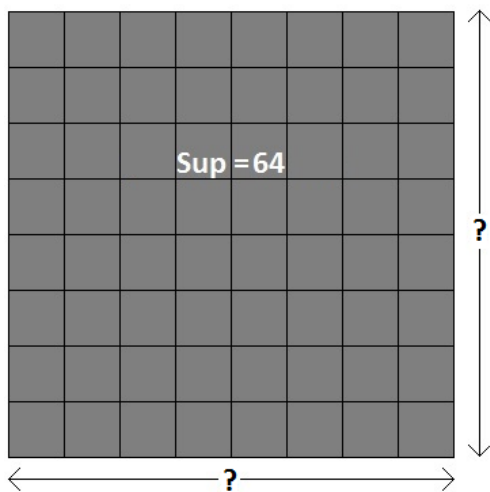
De fet, el mètode emprat consisteix en el que avui dia coneixem com a *regula falsi* o *regla de la falsa posició* consistent en assignar un valor inicial a la incògnita i realitzar les operacions com si aquest valor triat fos realment la solució. Òbviament, és difícil encertar el resultat al primer intent, però en comparar-lo amb el teòric s'obtenen pistes per millorar-lo fins arribar a la solució cercada (Kline, 1992:40).

Un cas típic d'aplicació d'aquest procediment seria calcular una arrel quadrada. De fet, és una part del mètode de càlcul del nostre programa **arrel.py**. Per mitjans geomètrics, conegut el valor del quadrat, construïm la figura corresponent, de la què hem de trobar la longitud dels costats. Com tots els costats tenen el mateix valor, hem d'anar dividint la superfície total pel valor triat, fins que coincideixi amb el quocient. Ho il·lustrem amb la següent figura:

---

<sup>12</sup> Zipf's law. A: *Wikipedia, The Free Encyclopedia*.

[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Zipf%27s\\_law&oldid=698322151](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Zipf%27s_law&oldid=698322151). Consultat el 10 de gener de 2016.



$$x^2 = 64$$

$$x = 5 ? \quad 64/5 = 12,8 \quad \rightarrow \quad x > 5$$

$$x = 10 ? \quad 64/10 = 6,4 \quad \rightarrow \quad 5 < x < 10$$

$$x = 7 ? \quad 64/7 = 9,14 \quad \rightarrow \quad 7 < x < 10$$

$$x = 8 ? \quad 64/8 = 8 \quad \rightarrow \quad x = 8$$

### 6.1. Procediments algebraics mitjançant l'aritmètica

Els problemes de determinació de la quantitat correcta mitjançant el mètode de la *falsa posició* dels papirs egipcis es resolen triant un nombre senzill arbitrari (2, 4, 5...) i aplicant-li l'enunciat proposat (Gillings, 1982:154). És difícil que encertem el valor correcte per casualitat, però amb només un intent el resultat obtingut ens condueix a la solució mitjançant la corresponent relació de proporcionalitat:

Si el nombre triat dóna com a resultat "resultat de prova", el nombre que busquem donarà el resultat correcte, que es pot calcular fàcilment mitjançant una senzilla regla de tres:

$$\text{nombre correcte} = \frac{\text{nombre de prova} \cdot \text{resultat final}}{\text{resultat de prova}}$$

Com que la relació ha d'ésser de proporcionalitat estricta ( $ax = b$ ), en cas de plantejar una equació de primer grau amb una constant, aquesta s'ha de modificar lleugerament per complir aquesta condició. És el cas del problema 19 del pMoscou, en què ens demanen una quantitat que sumada a la seva meitat, en afegir 4 ens ha de donar 10. El primer que fa l'escriba és restar 4 de 10 i així plantejar la relació de proporcionalitat necessària per abordar la solució per *falsa posició*.

### 6.2. Cerca d'una incògnita (equivalent a l'equació de primer grau)

Per comentar el procediment algebraic corresponent a l'equació de primer grau podem prendre com a exemple el problema 27 del pRhind:

- Una quantitat (*aha*) i la seva cinquena part, juntes fan 21. Quina és la quantitat?

L'autor tria el nombre 5 per provar. Això no és casual, ja que en multiplicar per la part fraccionària el resultat serà la unitat. En aquest cas la tria del 5 recorda el paper dels auxiliars vermells d'altres problemes:

En comprovar el valor seleccionat obtenim:

1x5	=	5
1/5x5	=	1
Total	=	6

Això vol dir que ens hem quedat curts, però ja ens aporta la pista per arribar al resultat final: hem de multiplicar pel nombre 5 triat la mateixa quantitat que fa falta multiplicar per 6 per arribar a 21. Aquesta quantitat és, doncs, 21 dividit per 6:

1	6
2	12
1/2	3
Total: <b>3+1/2</b>	<b>21</b>


El valor cercat és:  $5 \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) = 15 + \frac{5}{2} = 17 + \frac{1}{2}$

que podem comprovar:  $17 + \frac{1}{2} + \frac{17+\frac{1}{2}}{5} = 17 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 21$

Tot plegat és una mica enrevessat comparat amb la facilitat de plantejar una senzilla equació de primer grau en termes de l'àlgebra actual:

$$x + \frac{x}{5} = 21 \rightarrow 5x + x = 105 \rightarrow 6x = 105 \rightarrow x = \frac{105}{6} = \frac{35}{2} = 17 + \frac{1}{2}$$

### 6.3. Cerca de dues incògnites (equivalent a un sistema d'equacions, una d'elles quadràtica)

Al papir de Berlín trobem un problema que aporta un grau més de complicació algebraica, es tracta del problema 37 del document IV.1. Crida l'atenció el plantejament d'un sistema de 2 equacions amb dues incògnites, la primera de les quals és de segon grau (Clagett, 1999:54). A part del fet que sigui necessari recórrer al càlcul d'una arrel quadrada, no es tracta d'un plantejament especialment complicat, ja que és del tipus quadràtic pur:  $y=ax^2$ , sense altres termes en  $x$  ni constants que motivarien l'ús de la famosa (i més complicada) fórmula de l'equació de segon grau. Com que forçosament s'ha de resoldre l'arrel quadrada per trobar la solució del problema es planteja la qüestió sobre els procediments per calcular-les, dels quals no en tenim constància. Alguns autors suposen que devien existir taules calculades de manera senzilla multiplicant nombres per ells mateixos, i que també serien d'ajuda a l'hora de calcular per aproximació els valors intermedis no tabulats. El que sí es coneix és que existia un símbol especial per a representar aquest càlcul,  que representa una cantonada o un angle recte (Clagett, 1999:230), curiosament força semblant al que fem servir avui dia:  $\sqrt{\quad}$ . El problema esmentat té el següent enunciat:

- Dividir 100 colzes quadrats en dos quadrats, un d'ells de longitud de costat que sigui 3/4 parts de l'altre.

Com en el cas anterior, l'autor fa servir el mateix mètode de la falsa posició i comença triant el nombre 1 com a longitud del costat d'un dels quadrats. La fracció 3/4 la convertirem a fraccions egípcies:  $3/4 = 1/2 + 1/4$ .

Si un dels quadrats té com a costat un colze, l'altre en tindrà  $1/2 + 1/4$  de colze. La suma de les àrees de tots dos, que ha de donar 100, s'obté sumant els quadrats dels costats:

1 x 1	1
1/2 x (1/2 + 1/4)	1/4 + 1/8
1/4 x (1/2 + 1/4)	1/8 + 1/16

$$\text{Total} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

Al paper s'afirma, sense cap mena de demostració, que l'arrel quadrada de  $1+1/2+1/16$  és  $1+1/4$ . Això és una mica sorprenent, ja que no sembla gaire senzill trobar un procediment per arribar a aquest resultat, tal com veurem a l'apartat 6.5 (pàg. 33). Com que l'arrel quadrada del resultat que busquem (100) és 10, això vol dir que també ens hem quedat curts, però que ja tenim els elements suficients per arribar al resultat final: hem de multiplicar pel valor trobat  $1+1/4$  la quantitat que fa falta per arribar a 10. Aquesta quantitat és, doncs, 10 dividit per  $1+1/4$ :

$$\begin{array}{r} 1 \text{ ————— } 1+1/4 \\ 2 \text{ ————— } 2+1/2 \\ 4 \text{ ————— } 5 \\ 8 \qquad \qquad \mathbf{10} \text{ I el nombre cercat és } \mathbf{8} \end{array}$$

El costat de l'altre quadrat era, per definició,  $1/2+1/4$  del primer. Per obtenir-lo només cal multiplicar aquest valor per 8:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ ————— } 8 \\ 1/2 \qquad 4 \\ 1/4 \qquad 2 \\ \hline \text{Total} = 4 + 2 = \mathbf{6} \quad \text{L'altre costat és de } \mathbf{6} \text{ colzes de longitud} \end{array}$$

Finalment comprovem que tot sigui correcte:  $8 \times 8 + 6 \times 6 = 64 + 36 = \mathbf{100}$

En termes de l'àlgebra actual el plantejament del problema és força més senzill:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 100 \quad y = \frac{3}{4}x &\rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 100 \rightarrow 25x^2 = 1600 \\ x^2 = \frac{1600}{25} = 64 &\rightarrow x = \sqrt{64} = \mathbf{8} \rightarrow y = \frac{3}{4}8 = \frac{24}{4} = \mathbf{6} \end{aligned}$$

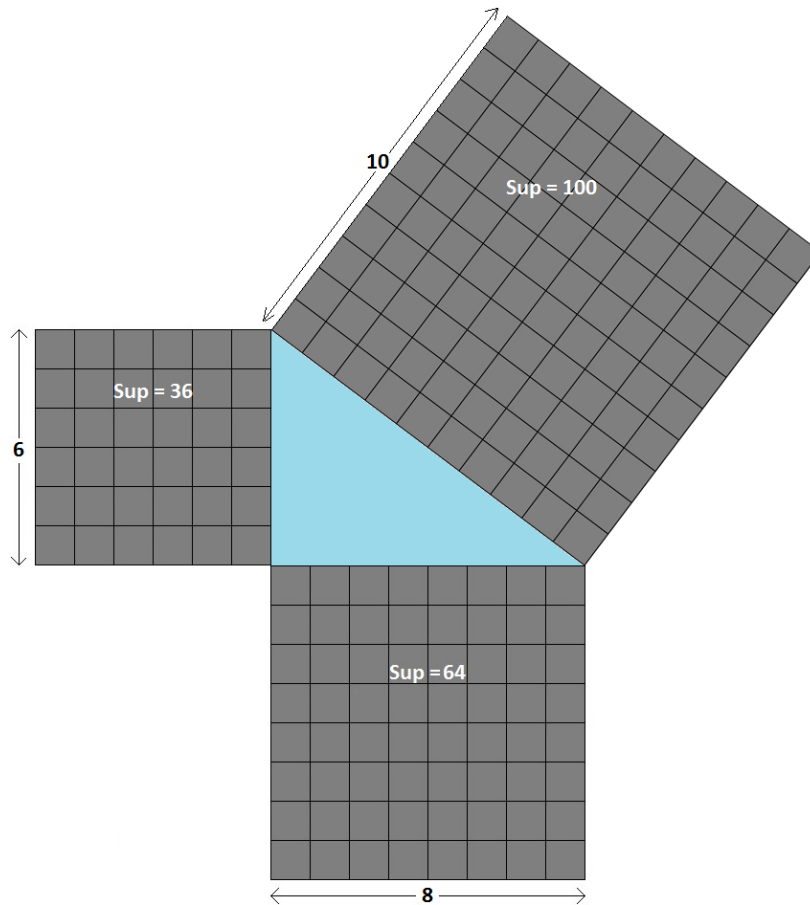
Tal com hem avançat abans, el que realment crida l'atenció en aquest problema és el càlcul exacte de l'arrel quadrada de  $1+1/2+1/16$  que l'escriba deixa caure sense revelar com l'ha obtingut. Amb el nostre sistema de fraccions arribar a aquest resultat seria molt fàcil:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{25}{16} \rightarrow \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

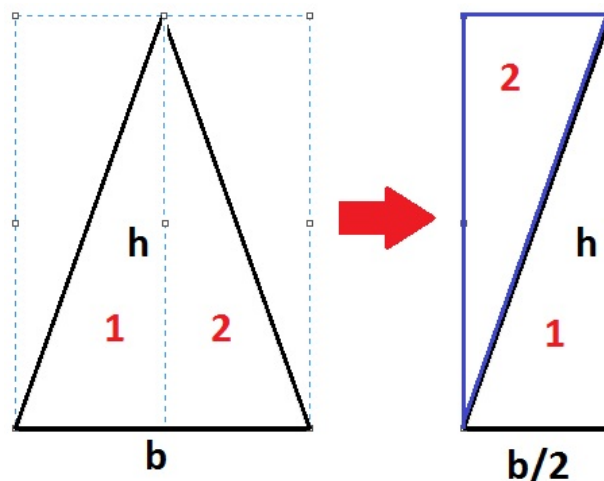
Tot plegat podria ésser una prova de que els papirs que ens han arribat són una adaptació pedagògica amb exemples preparats per capacitar els escribes, i que de cap manera mostren tot el potencial matemàtic d'aquesta civilització. Tot i això, cal suposar un ingent treball de realització de càlculs i la possibilitat d'adaptar-se a les solucions aproximades que devia exigir l'aritmètica dels casos reals. Cal remarcar que no és gaire recomanable baixar a l'arena de les fraccions amb arrels quadrades, terreny en què es fàcil trobar-se amb nombres irracionals que no admeten la representació sistematitzada i exacta que presenten els papirs.

## 6.4. Teorema de Pitàgores

Les característiques geomètriques del problema anterior serveixen per comentar un tema que també ha estat objecte de controvèrsia: si els antics egipcis coneixien el teorema de Pitàgores.



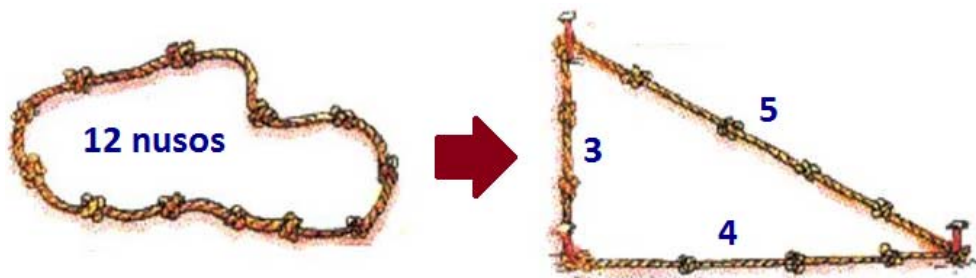
L'admiració per la majestuositat i la magnitud de les grans construccions egípcies ha motivat l'aparició de nombrosa literatura pseudocientífica i fantàstica sobre les piràmides (Gillings, 1982:237). En aquest context s'ha afirmat que els antics egipcis coneixien el teorema de Pitàgores, el valor de la secció àuria i el nombre  $\pi$  amb gran precisió. Deixant de banda les especulacions, la realitat és que als papirs que ens han arribat no en veiem cap indici. El que fa sospitar un cert coneixement pràctic del teorema de Pitàgores és el tractament dels càlculs d'àrees de triangles isòsceles en considerar-los com dos triangles rectangles (Boyer i Merzbach, 2011:14). Tal com mostra el problema 51 del pRhind (Buffum, 1927:92), l'àrea total seria la del rectangle corresponent a la combinació de tots dos triangles (Boyer i Merzbach, 2011:14):



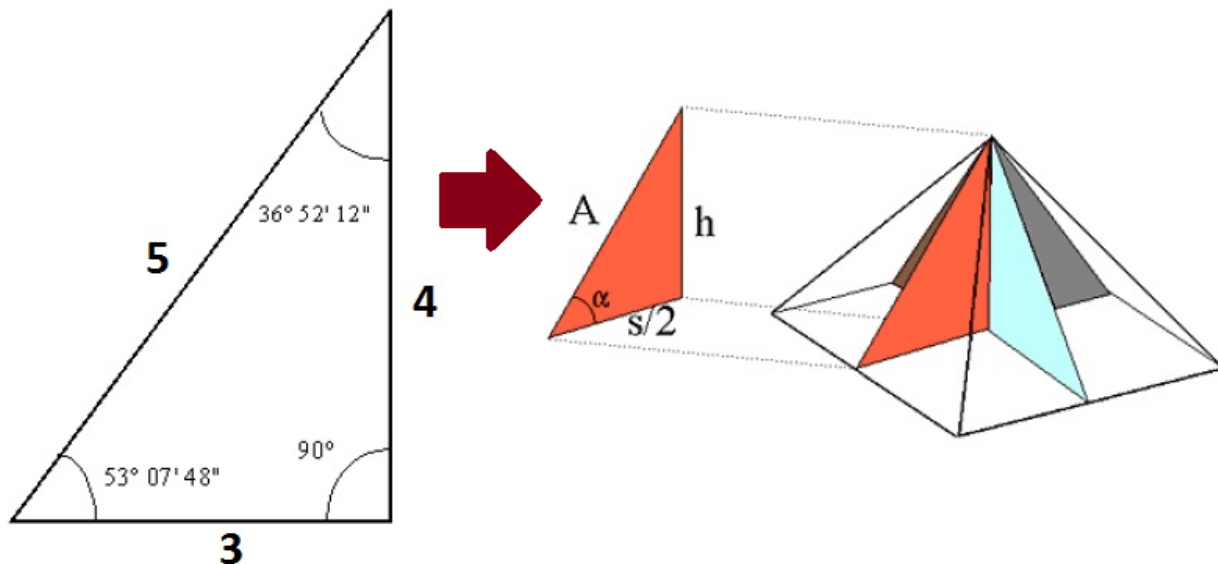
Tot i que no es pugui afirmar el coneixement teòric del teorema de Pitàgores segons la formulació posterior de la matemàtica grega, moltes de les seves implicacions pràctiques ja eren conegudes per la civilització babilònica. S’han trobat tauletes d’argila datades entre 1800–1650 aC que contenen esquemes i valors numèrics relacionats amb aquesta qüestió. La tauleta Plimpton 322 mostra nombres que compleixen amb les *ternes pitagòriques*. També s’han trobat problemes sobre càlculs d’hipotenuses i catets com a divisions diagonals d’un quadrat a les tauletes Yale i Tell Dhibayi (Neugebauer, 1969:36). Si admetem, tal com postula Friberg (2005), una certa connexió entre els coneixements científics i astronòmics de babilonis i egipcis, cal suposar una certa experiència en les implicacions pràctiques d’aquest important teorema.

Quant a les *ternes pitagòriques*, aquestes consisteixen en una seqüència de tres enters positius  $a$ ,  $b$ ,  $c$  que compleixen el teorema de Pitàgores:  $a^2 + b^2 = c^2$  (Anglin, 1994:8). A part dels testimonis babilònics que ens han arribat, tenim el problema 37 del papir de Berlín que hem comentat a l’apartat anterior, i que aplica la terna pitagòrica (6, 8, 10):  $6 \times 6 + 8 \times 8 = 36 + 64 = 100$ .

Una altra aplicació de la terna pitagòrica més senzilla (3, 4, 5) s’utilitzava de manera quotidiana en l’agrimensura egípcia. En efecte, les inundacions periòdiques del Nil esborraven les delimitacions prèvies dels camps, que s’havien de tornar a establir per part dels agrimensors. Per marcar els angles rectes de les parcel·les es va recórrer a l’artifici de construir un triangle rectangle mitjançant una corda amb nusos equidistants, que es tensava amb estakes. El corresponent a aquesta terna pitagòrica es concretava dividint els dotze nusos en intervals de 3, 4 i 5. D’aquesta manera s’asseguraven que el conjunt formava un angle recte (Kline, 1992:43). Sobre aquest procediment, a l’apartat 2.2 (pàg. 8) hem aportat una cita de Climent d’Alexandria.



Aquest mateix sistema podria haver servit durant els regnes Antic i Nou com a model geomètric per determinar el grau d’inclinació o *seked* de les piràmides. En el cas de la terna pitagòrica representada (3, 4, 5) es podria utilitzar com a guia durant la construcció, ja que presenta una inclinació molt semblant a la d’un bon nombre de piràmides (Rossi, 2007:236).



## 6.5. Procediment teòric per al càlcul d'arrels quadrades (programa: arrel.py)

La definició d'arrel quadrada d'un nombre és el valor que multiplicat per ell mateix coincideix amb el nombre en qüestió. Als problemes dels papirs sovint apareixen nombres elevats al quadrat, tant enters com fraccionaris. En canvi, les arrels quadrades són molt escasses i sempre apareixen a l'enunciat com a dada facilitada per l'autor, sense cap justificació del seu càlcul. Donada la seva dificultat, probablement quedaven fora de l'abast dels textos pedagògics. Tot i això, no seria gaire complicat elaborar taules de quadrats de nombres enters mitjançant la tècnica de multiplicació. Tot i que suposem que aquesta informació devia existir, malauradament no en tenim cap constància documental (Gillings, 1982:214).

En absència d'informació addicional sobre el particular proposarem a aquest treball una tècnica pràctica i senzilla per calcular arrels quadrades, l'eficàcia de la qual es pot comprovar amb el programa **arrel.py**. L'algoritme emprat es basa en la tradició egípcia de dividir per dos.

En el cas de que el nombre sigui quadrat d'una potència de dos, el procediment és trivial: n'hi ha prou amb fer una llista de les potències de dos per un cantó i dividir per dos a l'altre, fins que es trobin. Exemples:

		<b>1024</b>		<b>65536</b>	
	<b>256</b>			1	65536
1	256	1	1024	2	32768
2	128	2	512	4	16384
4	64	4	256	8	8192
8	32	8	128	16	4096
<b>16</b>	<b>16</b>	16	64	32	2048
		<b>32</b>	<b>32</b>	64	1024
				128	512
				<b>256</b>	<b>256</b>

En la resta de casos, es pot anar dividint per dos mentre que se superi el valor de la potència de dos de l'esquerra. Posteriorment s'ajusta el resultat amb aproximacions successives. Exemples:

<b>81</b>		<b>729</b>		<b>1764</b>	
1	81	1	729	1	1764
2	40 1/2	2	364 1/2	2	882
4	20 1/4	4	182 1/4	4	441
<b>8</b>	<b>10 1/8</b>	8	91 1/8	8	220 1/2
16	5 1/16 ***	<b>16</b>	<b>45 1/2 1/16</b>	16	110 1/4
		32	22 1/2 1/4 1/32 ***	<b>32</b>	<b>55 1/8</b>
				64	27 1/2 1/16 ***

Prenem, per exemple, el primer cas:

Podem afirmar que l'arrel quadrada de 81 està entre 8 i 16. Per arribar al resultat més exacte possible acotarem l'interval mitjançant dicotomies successives (anirem tallant per la meitat):

$16 - 8 = 8$  ---  $8/2 = 4$  provarem  $8 + 4 = 12$ : el valor de la dreta és  $81/12 = 6 + 1/2 + 1/4$ .

Com que és inferior a 12, descartem l'interval inferior: 12-16. El resultat cercat està entre 8 i 12.

Tornem a dividir l'interval:  $12 - 8 = 4$  ---  $4/2 = 2$  provarem  $8 + 2 = 10$ . El valor de la dreta serà  $81/10 = 8 + 1/10$ .

Com que és inferior a 10, descartem l'interval inferior: 10-12. El resultat cercat està entre 8 i 10. En termes de nombres naturals, només queda per provar el 9:

9  $81/9 = 9$ , que és el valor correcte.

El mateix procediment, només que una mica més llarg a mida que augmenta el nombre del que volem conèixer l'arrel quadrada, es pot aplicar a els dos altres exemples per arribar als resultats respectius:

$$\sqrt{729} = 27 \quad \dots \quad \sqrt{1764} = 42$$

## 6.6. Altres aplicacions matemàtiques del papir Rhind: repartiments proporcionals, regles de tres i progressions

Al llibre d'Arnold Buffum trobem un conjunt de problemes aplegats en una secció que l'autor qualifica de miscel·lània (Buffum, 1927:100 i ss.). Aquest apartat, comença amb el problema 61 del text, amb unes taules d'ajuda a la multiplicació i el procediment per calcular la multiplicació de  $2/3$  per l'invers de qualsevol nombre senar.

### 6.6.1 Repartiments proporcionals

Després de les taules d'ajuda el papir continua amb una interessant aplicació pràctica de les fraccions: el repartiment proporcional, procediment basat en les proporcions numèriques. Aquests càlculs obeïen al model redistributiu de l'economia egípcia en què els treballadors obtenien determinades quantitats de béns com a compensació per la seva feina. Entre les persones de la mateixa categoria laboral tothom rebia la mateixa quantitat de menjar i beguda, mentre que en el cas que analitzarem, corresponent al problema 63 del pRhind (Buffum, 1927:101) es planteja un repartiment desigual corresponent a persones de categories diverses.

La teoria (Kline, 1992:106) ens diu que per a repartir una quantitat  $Q$  en parts proporcionals a 3 nombres  $n1$ ,  $n2$  i  $n3$ , si  $x1$ ,  $x2$  y  $x3$  denoten les parts proporcionals assignades, es compleix que:

$$\frac{x1}{n1} = \frac{x2}{n2} = \frac{x3}{n3} = \frac{x1 + x2 + x3}{n1 + n2 + n3} = \frac{Q}{n1 + n2 + n3}$$

Aquest és precisament el mètode que Ahmes aplica al papir i que podem comprovar mitjançant els programes **sum\_frac.py**, **div\_frac.py**, **inv\_frac2.py** i **mul\_frac\_num.py** al problema 63 del pRhind: repartir 700 barres de pa entre quatre homes en parts proporcionals a  $2/3$ ,  $1/2$ ,  $1/3$  y  $1/4$ .

1. Primer s'ha de calcular la suma de les parts proporcionals:  $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

2. Després s'ha de dividir el nombre total de barres (700) per la suma de les proporcions. Això es podria fer mitjançant una divisió, però al papir s'opta per calcular l'invers del divisor i multiplicar-lo per la quantitat de barres. Tots i que els dos mètodes són equivalents, l'escriba opta per multiplicar per dues raons importants: multiplicar és més senzill que dividir i la fracció a multiplicar és més senzilla que la corresponent a la divisió. Així, sense cap mena de càlcul, es facilita el resultat de la inversió:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$$

3. Multiplicant aquest resultat pel valor total de barres obtenim **400**, que és la quantitat comuna a aplicar a tots els termes del repartiment. Així, cadascun dels homes rebrà:

home	proporció	Nº de barres
1	2/3	266 + 2/3
2	1/2	200
3	1/3	133 + 1/3
4	1/4	100
Total		<b>700</b>

### 6.6.2 Regla de tres

Els problemes on s'aplica la regla de tres per a la seva solució són interessants des del punt de vista pràctic, ja que van lligats als intercanvis comercials i la qualitat de la producció que suposa el concepte *pesu*.

Això ho il·lustrarem amb el problema 73 del pRhind (Buffum, 1927:109), que té com a enunciat:

- Suposem que et diuen: 100 barres de pa de *pesu* 10 s'han d'intercanviar per barres de *pesu* 15. Quantes n'hi hauria d'haver?

L'escriba Ahmes calcula la quantitat de farina emprada per fer les 100 barres de *pesu* 10:  $100/10 = 10$  *hekats*. Això vol dir que amb 1 *hekat* es fan 10 barres de *pesu* 10. Aquesta mateixa quantitat es pot fer servir per produir 15 barres de *pesu* 15. Així, per obtenir el resultat final, només cal multiplicar pel nombre de *hekats* de farina disponibles:  $15 \times 10 = 150$  barres.

Com veiem, el plantejament s'ajusta perfectament a una regla de tres:

$$\begin{array}{l}
 100 \text{ barres} \text{ ----- } \textit{pesu} 10 \\
 x \text{ barres} \text{ ----- } \textit{pesu} 15
 \end{array}
 \qquad
 x = \frac{100 \cdot 15}{10} = \mathbf{150}$$

Resulta curiós que aquest mètode tan senzill no s'apliqui a un càlcul molt similar del problema 72 del mateix papir i que l'autor es compliqui la vida innecessàriament. L'enunciat és el següent:

- Imagina que et diuen: 100 barres de pa de *pesu* 10 s'han de canviar per barres de *pesu* 45, quantes hi haurà?

La qüestió es podria resoldre tal com hem comentat anteriorment, amb una regla de tres:

$$\begin{array}{l}
 100 \text{ barres} \text{ ----- } \textit{pesu} 10 \\
 x \text{ barres} \text{ ----- } \textit{pesu} 45
 \end{array}
 \qquad
 x = \frac{100 \cdot 45}{10} = \mathbf{450}$$

En comptes de fer-ho així, Ahmes s'embolica aplicant un criteri similar al de *regula falsi* que hem vist en els problemes assimilables a les equacions amb una incògnita. Tot i que el mètode és matemàticament correcte, requereix més càlculs i més complexos.

Per començar, calcula l'excés de *pesu* de la quantitat requerida:  $45 - 10 = 35$ . A continuació divideix 35 per 10 para obtenir l'excés per barra:

$$\begin{array}{ll}
 1 & 10 \\
 2 & 20 \\
 1/2 & 5
 \end{array}$$

De  $35/10 = 3 + 1/2$  s'obté l'excés per barra.

Finalment multiplica el total de barres per aquesta quantitat per determinar l'excés de *pesu* total:

$100 \times (3+1/2) = 350$ , valor al què ha d'afegir les 100 barres de *pesu* 10 originals. Per aquesta via arriba, doncs, al resultat final:  $350 + 100 = 450$  barres de *pesu* 45.

### 6.6.3 Progressions aritmètiques

Els primers estudis de sèries i progressions numèriques s'han atribuït tradicionalment a Pitàgores i els seus seguidors (Kline, 1992:57), no obstant això, davant de les evidències provinents de les matemàtiques babilònica i egípcia, cal endarrerir força segles el coneixement i el càlcul d'aquestes tècniques numèriques (Kline, 1992:28). Als llibres VIII i IX dels *Elements* d'Euclides s'analitzen les progressions amb profunditat (Kline, 1992:57).

Exemple de progressió aritmètica: problema 64 del pRhind (Buffum, 1927:102):

- si et diuen que has de dividir 10 *hekat* d'ordi entre 10 homes de manera que la diferència entre cadascun dels homes i el següent sigui de  $1/8$  de *hekat*, quina part li correspon a cada home?

La fórmula actual per calcular la suma dels termes d'una progressió aritmètica és la següent (Spiegel, 1968:107):

$$S = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

On  $a_1$  és el primer terme,  $a_n$  el darrer i  $n$  el nombre de termes

Coneguda la diferència entre dos termes, el darrer  $a_n$  es pot calcular a partir del primer:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

On  $d$  és la diferència entre dos termes consecutius

Com que les dades que coneixem són la suma i la diferència entre termes, combinant les fórmules anteriors podem calcular el valor del darrer terme aplicant:

$$a_n = \frac{S}{n} + \frac{(n - 1)}{2} \cdot d$$

i a partir d'aquí, obtenir la resta de termes, que és precisament com ho resol l'autor del papir, que aplica el procediment sense detallar cap mena de justificació ni raonament lògic. Els passos que segueix són els següents:

1. El nombre de diferències és 9, una menys que el total d'homes: correspon a  $(n - 1)$  de la fórmula
2. Multiplica el número 9 per la meitat de la diferència:

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \rightarrow 9 \cdot \frac{1}{16} = \frac{9}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

3. Per completar la suma de la fórmula proposada, afegeix a aquest resultat la mitjana de la suma de les parts:

$$\frac{10}{10} = 1 \rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

4. Un cop té la part que corespon al desè home, només ha d'anar restant successivament la diferència (1/8) per obtenir les parts corresponents a la resta:

10	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$	6	$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	<table border="1"> <tr> <td>2</td> <td><math>\frac{1}{2} + \frac{1}{16}</math></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td><math>\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;"><b>Total = 10</b></td> </tr> </table>	2	$\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$	1	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	<b>Total = 10</b>	
2	$\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$									
1	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$									
<b>Total = 10</b>										
9	$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	5	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$							
8	$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$	4	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$							
7	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$	3	$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$							

### 6.6.4 Progressions geomètriques

Les progressions geomètriques, tractades amb detall als llibres VIII i IX dels *Elements* d'Euclides (c. 300 aC) també compten amb un precedent al pRhind que, més que obeir a una necessitat pràctica, sembla formar part d'un exercici d'entreteniment aritmètic. Es tracta del problema 79, que té el següent enunciat:

- 7 cases, 49 gats, 343 ratolins, 2401 espigues d'espelta, 16807 *hekat* (mesures de gra)

Se suposa que l'autor vol dir que hi ha 7 cases amb 7 gats a cadascuna d'elles; cada gat menja 7 ratolins, que a la seva vegada han menjat 7 espigues de gra, cadascuna de les quals hauria produït, si s'hagués sembrat, 7 *hekat* (1 *hekat* = 4,8 l) de gra (Robins i Shute, 1987:56). Ahmes no només fa constar la possible quantitat de gra que no s'ha conreat, sinó que afegeix a la suma total els heterogenis parcials de la resta d'elements de l'enunciat: cases més gats més ratolins més espigues més *hekats* de gra.

Estudiosos del papir com Rodet (1882) han interpretat tant l'enunciat com la solució en termes de "facècia". De fet, l'objectiu de l'exercici és difícil d'interpretar, ja que la suma total d'un conjunt d'elements de categories diferents no té massa sentit (Buffum, 1927:112).

Com que al mateix enunciat ja ens faciliten les potències de 7 necessàries per al càlcul final, n'hi ha prou amb sumar-les:  $7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = 19607$ . Tot i això, el papir ens revela que a l'antic Egipte ja es coneixia la suma de termes d'una progressió d'aquest tipus, ja que en una columna a part es calcula la darrera multiplicació per 7 de la progressió geomètrica:

1	2801
2	5602
4	11204
<hr/>	
7	19607

Es tracta, doncs, d'un càlcul que precedeix en molts segles el plantejament corresponent a la proposició 35 del llibre IX dels *Elements* d'Euclides (Katz, 2009:81). Aplicant la fórmula anterior comprovem l'exactitud del mètode. Així, per  $n=5$ ,  $a = r = 7$ :

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{7(7^5 - 1)}{7 - 1} = \frac{7 \cdot 16806}{6} = \frac{117642}{6} = 19607$$

Al *Liber abaci* de Fibonacci trobem un problema similar expressat amb altres paraules:

Set dones grans van anar a Roma; cadascuna tenia set mules; cada mula portava set sacs; cada sac aplegava set barres de pa; amb cada barra de pa hi havia set ganivets; cada ganivet es va guardar en set beines (Boyer i Merzbach, 2011:230).

### 6.7. Avaluació de la qualitat de la producció: el *pesu*

Tant al pRhind com al pMoscou hi trobem un grapat de problemes relacionats amb el concepte anomenat *pesu* (ꜥꜥꜣw), mot que deriva de l'arrel del verb "cuinar" (ꜥꜥꜣ) i significa quelcom semblant a "relació de cuinar", és a dir, el nombre d'unitats de pa o cervesa que es podien obtenir a partir d'una unitat de gra, en concret, d'un *hekat* (Buffum, 1927:105). La relació és molt senzilla:

$$\textit{pesu} = \frac{\text{nombre de barres de pa (o gerres de cervesa)}}{\text{nombre de hekats de gra}}$$

De la relació anterior es dedueix que un valor més petit de *pesu* implica una major qualitat o valor dels aliments produïts. Els problemes plantejats, doncs, sovint requereixen un senzill càlcul amb una regla de tres per determinar com s'han d'intercanviar les unitats produïdes en funció de la seva qualitat. Tornarem a posar com a exemple el problema 73 del pRhind, que hem desenvolupat en l'apartat 6.8 (pàg. 33) d'aquesta secció referent al procediment de la regla de tres i que té el següent enunciat (Buffum, 1927:109):

- Suposem que et diuen: 100 barres de pa de *pesu* 10 s'han d'intercanviar per barres de *pesu* 15. Quantes n'hi hauria d'haver?

La solució és molt senzilla, si el *pesu* de les 100 barres és 10, això vol dir que amb 1 hekat de gra s'han cuit 10 barres, aleshores només cal multiplicar aquesta quantitat pel nou *pesu*, resultant un total de 150 barres de pa.

L'abundància d'aquest tipus de problemes (10 al pRhind i 10 al pMoscou) fa pensar que es tracta d'un càlcul molt habitual dels escribes, en aplicació de la seva tasca de funcionaris de control i supervisió de la producció alimentària. Per això als inventaris, a part de mostrar el nombre de barres de pa o gerres de cervesa, també hi consta el *pesu* corresponent (Robins i Shute, 1987:15).

## 7. Geometria

Els testimonis clàssics sobre la geometria egípcia que hem esmentat a l'apartat 2.2 del present treball (pàg. 6), juntament amb els impressionants testimonis arquitectònics i artístics que ens han arribat, fan pensar que aquesta civilització disposava d'uns coneixements geomètrics molt avançats. Malauradament, de l'estudi dels papirs es dedueix que aquest optimisme és força exagerat.

En primer lloc, cal remarcar que els egipcis no feien cap distinció epistemològica entre les diverses branques de la matemàtica, tal com les entenem actualment. Això vol dir que no es considerava la geometria com a disciplina amb característiques diferenciades, sinó que se la contemplava com una aplicació més de l'aritmètica a l'hora de calcular àrees i volums. Així, doncs, els escribes disposaven de procediments per calcular àrees de figures geomètriques senzilles com rectangles, triangles, trapezoides i cercles, així com volums de dissenys força complexos. En el cas concret del triangle l'àrea s'obtenia multiplicant una longitud per la meitat de l'altra, però el plantejament dels problemes no queda gaire clar, ja que no es té la certesa de que els termes utilitzats representin les

longituds de la base i l'alçada o bé es refereixen als costats. A més, les figures dels papirs estan dibuixades d'una manera tan descuidada que sovint no es pot determinar amb precisió la naturalesa geomètrica de l'àrea o volum que s'està calculant (Kline, 1992:41).

Si el càlcul de l'àrea del cercle que exposem a l'apartat 7.2 és força exacte, en determinar la superfície de terrenys sovint no s'actua amb gaire cura i es recorre a aproximacions rudimentàries. Un exemple el trobem als murs del temple d'Edfú, on les àrees dels camps donats a la institució es calculen multiplicant la semisuma dels costats oposats, mètode força matusser i imprecís (Kline, 1992:42).

De totes maneres, als dos principals papirs disponibles (Rhind i Moscou), els càlculs geomètrics són força interessants i estan resolts de manera correcta, responent a necessitats pràctiques de mesura d'àrees de terrenys i de volums de magatzems i d'altres construccions. En el pRhind les figures que es tracten són senzilles (triangles, quadrilàters, cercles...) i ocupen les següents seccions:

- **problemes 41–47:** Càlcul de volums d'envasos de diferents formes
- **problemes 48–55:** Càlcul d'àrees de camps de diferents contorns

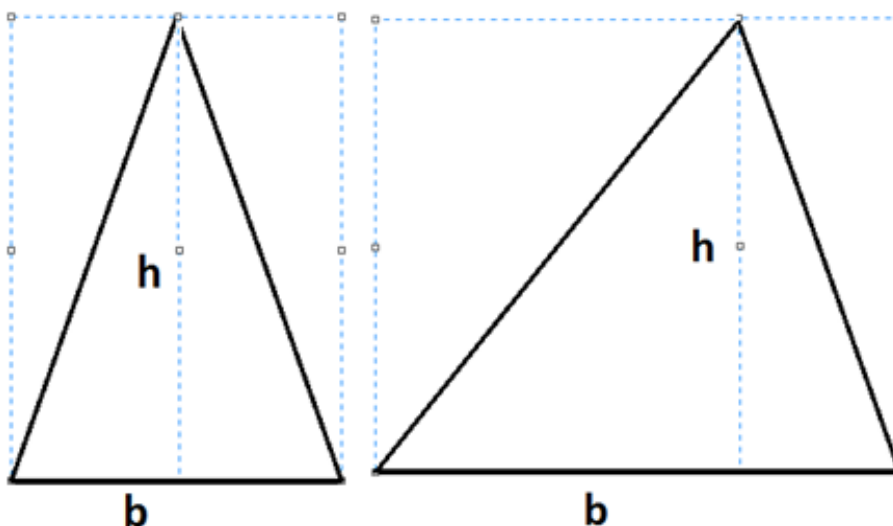
Per la seva banda, el pMoscou inclou dos problemes més complexos i interessants que comentarem més endavant en aquesta secció:

- **problema 10:** Càlcul de l'àrea de la superfície d'una semiesfera
- **problema 14:** Càlcul del volum d'una piràmide truncada

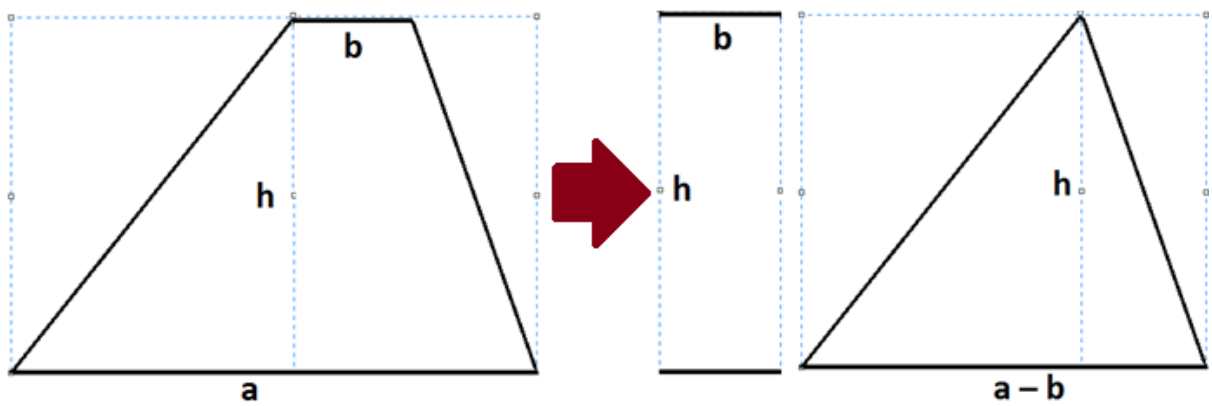
### 7.1. Càlcul de superfícies de figures elementals

Es basa en el coneixement de la superfície del rectangle (multiplicació de la longitud dels seus costats), o bé del quadrat, que seria un rectangle amb els costats iguals

Quant a la superfície del triangle, s'obté tenint en compte que abasta la meitat del rectangle que el conté. Per això, al problema 51 del pRhind s'indica que s'ha de prendre la meitat de la base i multiplicar-la per l'alçada (Buffum, 1927:92).



- Càlcul de l'àrea d'un trapezi (problema 52 del pRhind). Per a l'escriba es tracta d'un “triangle truncat” (Buffum, 1927:93):



$$\frac{(a-b)h}{2} + bh = \frac{2bh + ah - bh}{2} = \frac{ah + bh}{2} = \frac{(a+b)h}{2}$$

L'aplicació correcta del procediment de càlcul ens revela el coneixement d'un procediment específic i força avançat per al càlcul del trapezi, que hem pogut comprovar de manera algebraica en tractar-lo com un triangle i un rectangle, figures que sabem que els escribes egipcis dominaven.

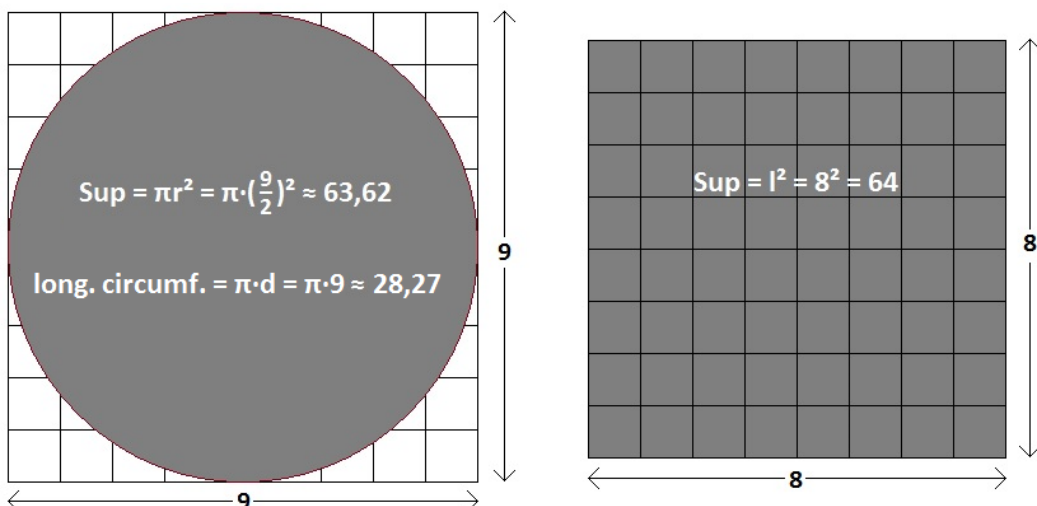
## 7.2. Aproximació als càlculs de figures circulars sense el nombre $\pi$

Al pRhind hi ha un parell de problemes on es mostra de manera explícita el mètode seguit pels escribes per calcular l'àrea d'un cercle (Buffum, 1927:91–92):

- **problema 48:** compara l'àrea d'un cercle amb la del quadrat que el circumscriu
- **problema 50:** quina és l'àrea d'un camp circular de 9 *khet* de diàmetre?

En tots dos casos el cercle té diàmetre 9. Aquesta tria no és casual, ja que es considera que l'àrea del cercle és  $\frac{8}{9}$  de la del quadrat que el circumscriu. Al papir hi consta el valor 9 perquè  $\frac{8}{9}$  de 9 és 8 i això facilita els càlculs, ja que el següent pas és elevar al quadrat:  $8 \times 8 = 64$ . Si el cercle fos de diàmetre 10 en multiplicar per  $\frac{8}{9}$  obtindríem  $8\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ , i les operacions per elevar al quadrat es complicarien una mica. El caràcter didàctic dels papirs prioritza que l'alumne entengui el procés de càlcul i per això evita l'ús de nombres més complexos.

Cal remarcar que en cap moment s'esmenta la relació entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre, nombre irracional que coneixem per  $\pi$  i que també intervé en el càlcul de la superfície del cercle. La següent figura il·lustra el càlcul proposat al text:



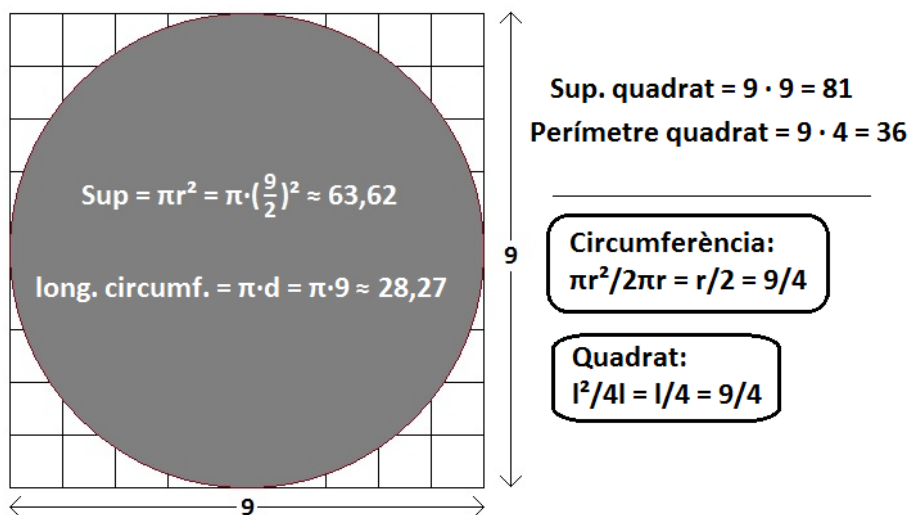
L'exemple proposat mostra les dades del problema 50 del pRhind (Buffum, 1927:92). De les relacions geomètriques es dedueix:

$$\pi = \frac{64}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{256}{81} = 3,1604938271 \dots \approx 3,16$$

Així, els valors obtinguts per a la longitud de la circumferència i la superfície del cercle proposat a la figura anterior serien força semblants als reals:

$$\begin{aligned} \text{sup} &= 64 \approx 3,16 \cdot (9/2)^2 \approx 63,99 \quad [\text{valor real} \approx 63,62, \text{error del } 0,6\%] \\ \text{long} &\approx 3,16 \cdot 9 = 28,44 \quad [\text{valor real} \approx 28,27, \text{error del } 0,6\%] \end{aligned}$$

Tot i que  $\pi$  és un nombre irracional amb infinits decimals, no seria gaire difícil calcular-lo amb dues xifres de precisió (3,14) de manera empírica, clavant un pal a terra, traçant una circumferència amb l'ajuda d'una corda i mesurant la longitud traçada. Per això, dels problemes dels papirs es pot treure la conclusió de que la matemàtica egípcia probablement desconeixia aquest nombre. No obstant això, no deixa de sorprendre'ns amb postulats i fórmules que són rigorosament certs, com la següent afirmació relativa al cercle que trobem implícita en els problemes esmentats: la raó entre l'àrea d'un cercle i la longitud de la seva circumferència és la mateixa que entre l'àrea del quadrat que la circumscriu i el seu perímetre (Boyer i Merzbach, 2011:15):



Aquestes afirmacions, juntament amb la relativament acurada aproximació de  $\pi$  implícita als càlculs o la complicada fórmula per calcular el tronc de piràmide del pMoscou han estimulat la imaginació dels egipcians, alguns dels quals sostenen la possibilitat que els antics egipcis coneguessin més del que revelen aquests papirs didàctics, i que la seva matemàtica hagués assolit un grau de perfecció superior al què ens ha arribat. No cal dir que tots aquells que han aprofundit en l'estudi d'aquesta disciplina en l'antiguitat, com Neugebauer, posen molt en dubte aquestes teories i remarquen el caràcter rudimentari i utilitari de l'aritmètica antiga. De totes maneres, el valor implícit del mètode de càlcul egipci per a  $\pi$  és notablement superior al que trobem a la Bíblia, que l'arrodoneix a 3, com podem veure en el següent versicle relatiu a la construcció del temple de Salomó i que trobem repetit exactament en dues cites:

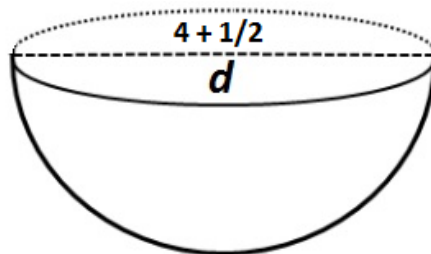
Després va fer l'anomenat "Mar" de bronze, un dipòsit rodó de bronze fos. Feia deu colzades de diàmetre, trenta de perímetre i cinc de profunditat (*Reis I*, 7, 23 i *Cròniques II*, 4, 2).

### 7.3. Aplicacions geomètriques avançades: superfície d'una semiesfera i volum d'un tronc de piràmide

En aquesta secció exposarem les dues evidències geomètriques més sofisticades de la matemàtica egípcia. Es tracta dels problemes 10 i 14 del pMoscou i que s'ocupen de càlculs relatius a dues figures complexes com són la semiesfera i la piràmide truncada. Deixant de banda els problemes d'interpretació del text i el traçat imprecís dels dibuixos representats als papirs, acceptarem com a vàlides les figures anteriors, ja que els procediments de càlcul i els resultats finals s'ajusten a les seves característiques.

#### 7.3.1 Càlcul de la superfície d'una semiesfera

El problema 10 del pMoscou ens demana el càlcul de la superfície d'una semiesfera de diàmetre  $4 + 1/2$  (Gillings, 1982:195). La fórmula actual per calcular aquest objecte és:  $2\pi r^2$ , on  $r$  és el radi de l'esfera, o la meitat del seu diàmetre. Tenint en compte que  $\pi r^2$  correspon a l'àrea d'un cercle, la superfície de la semiesfera és justament el doble que la del cercle que la delimita.



Com que a l'apartat anterior hem vist que la matemàtica egípcia desconeixia el nombre  $\pi$ , el càlcul detallat al paper consisteix a multiplicar per dos la superfície del cercle, que l'escriba estima en  $8/9$  del quadrat que el circumscriu. D'aquesta manera:

$$S = 2 \left( \frac{8}{9} \left( 4 + \frac{1}{2} \right) \right)^2 = 2 \left( \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{2} \right)^2 = 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot 16 = \mathbf{32}$$

Es tracta, doncs, d'una aproximació molt acurada, ja que aplicant la fórmula correcta obtenim:

$$S = 2 \pi r^2 = 2 \pi \left( \frac{9}{4} \right)^2 \approx \mathbf{31,81}$$

Aquest resultat, amb una precisió de gairebé el 99,5%, ha estat qualificat pels estudiosos com a sorprenent, ja que s'avança uns 1500 anys al testimoni més antic conegut del càlcul d'una superfície semiesfèrica. Relectures posteriors del text, per cert força obscur, apunten a altres hipòtesis de figures possibles com un semicilindre o el traçat aproximat d'una cúpula. En qualsevol cas, sembla que hi ha consens sobre aquesta primícia en l'estimació d'una superfície curvilínia (Boyer i Merzbach, 2011:18).

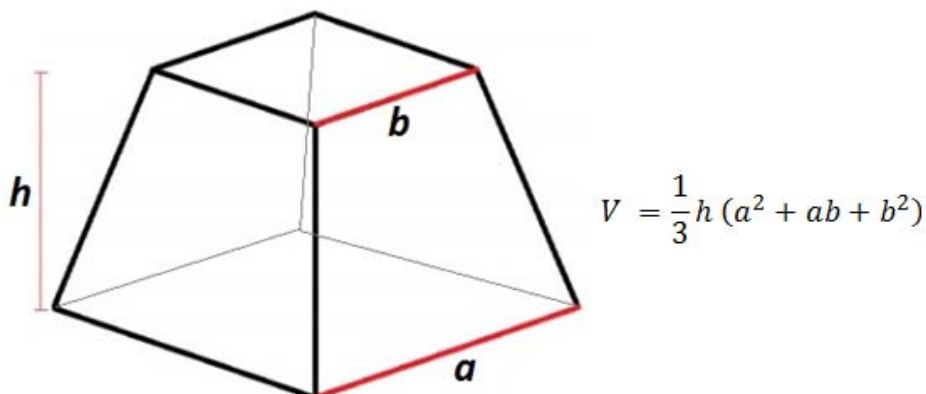
#### 7.3.2 Càlcul del volum d'un tronc de piràmide

Si el resultat anterior era aproximat a causa del desconeixement del nombre  $\pi$ , el problema 14 del mateix paper ens remet al càlcul exacte del volum d'un tronc de piràmide. El text diu el següent:

- Si algú et diu: una piràmide de 6 d'alçada, 4 de base (inferior) i 2 de cim (base superior), has de calcular el quadrat de 4: el resultat és 16; has de duplicar 4: el resultat és 8; has de calcular el

quadrat de 2, que és 4, sumar 16, 8 i 4 per obtenir 28; calcular 1/3 de 6, que és 2. Ara has de prendre 28 dues vegades, que dóna 56 i ja has trobat [que] és correcte (Clagett, 1999:221).

Pas a pas, l'escriba va dictant les operacions que condueixen al resultat final, aplicant la fórmula correcta per aquest tipus de figura geomètrica:



Introduint els valors a la fórmula podem comprovar que el resultat de l'exercici és correcte:

$$V = \frac{1}{3} 6 (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = \frac{1}{3} 6 (16 + 8 + 4) = \frac{1}{3} 6 \cdot 28 = 2 \cdot 28 = \mathbf{56}$$

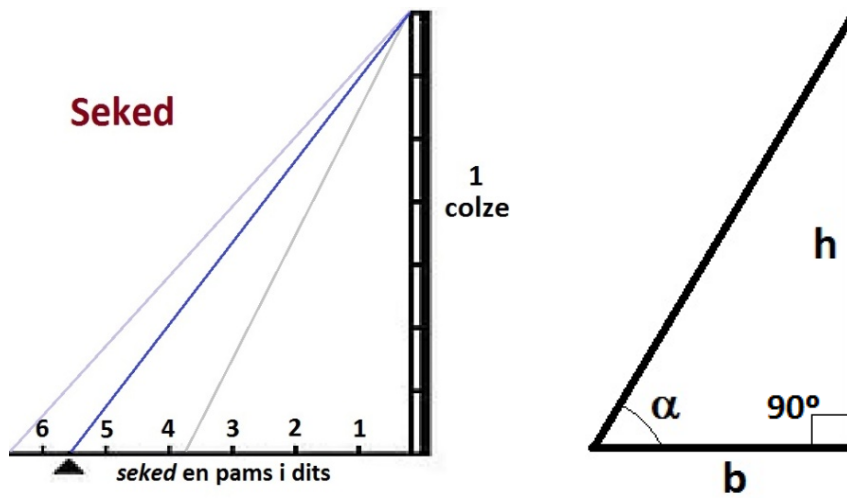
El text de paper revela que el procediment per calcular el volum de la piràmide truncada era conegut pels escribes egipcis, així com el corresponent al volum d'una piràmide completa, que és més senzill:

$$V = \frac{1}{3} b^2 h$$

De fet, aquest coneixement era necessari per calcular els materials necessaris per a la seva construcció. El que no se sap és com van arribar a deduir aquestes tècniques. Se suposa que el volum de la piràmide es pot deduir de manera experimental, mètode que potser també es podria aplicar al tronc d'aquesta figura. Hi ha autors que suggereixen que, en aquest darrer cas, es podia haver arribat a la determinació del seu volum mitjançant la descomposició del tronc de piràmide en paral·lelepípedes, prismes i piràmides, que es podien posteriorment reagrupar per arribar a la notable fórmula que hem comentat (Gillings, 1982:191).

#### 7.4. Dimensions i inclinació de la piràmide (programa: *seked.py*)

Els problemes 56–60 del pRhind plantegen diversos càlculs sobre la base, l'alçada i l'angle d'inclinació de la piràmide. Per a la matemàtica egípcia el que nosaltres entenem com a *angle* no tenia cap sentit. En el seu lloc s'utilitzava el concepte de *seked* (sqd) o desplaçament lateral en pams de la inclinació d'un colze reial de 7 pams. Aquest paràmetre es feia servir en els càlculs geomètrics sobre piràmides (Robins i Shute, 1987:15). A les següents figures podem veure els factors que intervenen als càlculs i mostren gràficament que la inclinació de la piràmide augmenta a mida que disminueix el *seked*:



Plantejat com a triangle rectangle, amb alçada  $h$  i base  $b$  (corresponent a la meitat de la base de la piràmide), del manual de fórmules matemàtiques de Spiegel (1968:12) obtenim la fórmula que ens permetrà calcular l'angle  $\alpha$ :

$$\text{cotangent } \alpha = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{catet oposat}} = \frac{b}{h} \rightarrow \tan \alpha = \frac{h}{b} \rightarrow \alpha = \arctan \left( \frac{h}{b} \right)$$

En aquest tipus de càlcul geomètric s'estableix una relació de dependència entre els tres paràmetres del triangle tal que, coneguts dos d'ells, s'obté el tercer amb facilitat. Tan sols cal tenir la precaució de convertir a pams i dits el valor calculat del *seked* en colzes (1 colze = 7 pams i 1 pam = 4 dits), o bé transformar aquesta notació a colzes abans de calcular la semibase o l'alçada.

Per il·lustrar aquest senzill càlcul geomètric, el nostre programa **seked.py** contempla totes les opcions possibles, així com una conversió directa entre angle i *seked*. Per exemple, si entrem les dades de la piràmide de Keops (base=230,3 m i alçada=146,6 m) obtenim:

$$\text{seked} = 5 \text{ pams } 1+1/4 \text{ dits} \rightarrow \text{angle} = 51^\circ 51'$$

## 8. Recerca pràctica: anàlisi informàtica de la taula 2/n del recte del Papir Rhind, altres taules del mateix papir i el contingut del Rull Matemàtic de Cuiro.

### 8.1. Importància de la taula del recte del papir Rhind

Els valors tabulats de la taula 2/n del pRhind obeeixen a mètodes de càlcul molt particulars que cerquen en tot moment les solucions més senzilles, tot i que com veurem més endavant en la nostra anàlisi, de vegades n'hi ha de millors. El fet que trobem aquests valors tabulats no vol dir que en altres testimonis escrits no s'hagin detectat altres solucions per al desplegament de fraccions, tal com remarca Neugebauer (1969:92-93) en observar en un ostracon del Regne Nou un valor de 2/7 alternatiu i més complicat que el present al pRhind:

$$(\text{pRhind}): \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \quad \dots \quad (\text{ostracon de la Tomba de Sen-Mut}): \frac{2}{7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$$

A més, tal com apareixen els valors al papir, amb una justificació dels nombres triats per als desenvolupaments, més que una taula semblen un conjunt de problemes de divisió de dos per els enters senars entre 3 i 101 (Knorr, 1982:135 i Buffum, 1927:50-60). És possible que amb la seva demostració, Ahmes faciliti las pautes per exercitar els alumnes en el càlcul de nous valors.

Una qüestió interessant és el fet que la taula conté només representacions de fraccions de la forma 2/n, probablement perquè només amb aquests desenvolupaments ja n'hi ha prou per abordar qualsevol tipus de càlcul relacionat amb l'aritmètica de fraccions. Així, si volem obtenir el resultat de 3/5 ho podem fer de la següent manera:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + (\text{de la taula Rhind}) \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = (\text{reordenant}) \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$$

En cas de voler calcular 4/15 també és força senzill:

$$\frac{4}{15} = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = (\text{de la taula Rhind}) \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

Com que tenim termes repetits, multiplicar per dos equival a dividir per dos el denominador, amb resultat exacte en cas de valors parells i, així s'obté:

$$\frac{4}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$$

Per calcular 6/7 es calcula primer 3/7, seguint el mètode anterior i després es duplica:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1}{7} (\text{de la taula Rhind}) \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = (\text{reordenant}) \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{6}{7} = 2 \cdot \frac{3}{7} = 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{2} + \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \right] + \frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$$

De manera similar, amb més o menys grau de dificultat i de complexitat amb els càlculs necessaris, amb l'ajuda d'aquesta taula es pot representar qualsevol nombre racional. En línies generals, el procés seria el següent:

1. Per sumar dos nombres fraccionaris n'hi ha prou amb juxtaposar els seus desenvolupaments. En cas que un terme aparegui dues vegades, si té denominador parell se simplifica en dividir-lo per 2 aplicant la regla:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

Si, en canvi, el denominador és senar, els dos termes es poden substituir pel desenvolupament corresponent de la taula  $2/n$ .

El procés s'ha de repetir fins que tots els denominadors resultants siguin diferents.

2. Per multiplicar per dos un nombre fraccionari, aplicar el criteri exposat en l'apartat anterior per als termes que apareixen dues vegades.
3. Per obtenir el desenvolupament fraccionari corresponent a la divisió de dos nombres enters  $a/b$  hem de distingir dos casos:
  - a) si el numerador és parell ( $a = 2n$ ), calcular  $n/b$  i després multiplicar per dos com a l'apartat anterior.
  - b) si el numerador és senar se li resta una unitat per fer-lo parell  $(a-1)/b$ , i es desenvolupa com a l'apartat anterior, després només cal afegir el terme restat abans:  $1/b$ .

Il·lustrarem aquest darrer cas més complex amb el desenvolupament de la fracció  $17/18$ :

$$\frac{17}{18} = \frac{16}{18} + \frac{1}{18} = \frac{8}{9} + \frac{1}{18} = 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = 2 \left( \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \right) + \frac{1}{18}$$

Prenem el valor  $2/9$  de la taula del pRhind:  $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$$\frac{17}{18} = 2 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right) + \frac{1}{18} = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{18} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{18}$$

Tornem a prendre  $2/9$  de la taula del pRhind  $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$  i el corresponent a  $2/3$ :  $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$$\frac{17}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

D'aquesta manera, amb la taula  $2/n$  i una mica de paciència a l'hora de dur a terme els càlculs, estem en disposició d'abordar amb èxit l'aritmètica bàsica del càlcul amb fraccions egípcies. Tenint en compte que el procés de duplicació és un dels puntals de la matemàtica egípcia, no és estrany que al paper de Lahun també es trobi una part d'aquesta taula, tot i que incompleta (Ritter, 2000:129).

## 8.2. Algoritme voraç (programa: `fe_alg_voraç.py`)

La primera aproximació al desenvolupament de nombres racionals en fraccions unitàries és l'anomenat "algoritme voraç". La implementació d'aquesta operativa és tan senzilla que va ésser el punt de partida dels programes informàtics de càlcul de fraccions egípcies del present treball.

En matemàtiques, un *algoritme voraç* (en anglès, *greedy algorithm*) és un procediment de càlcul que pren una seqüència d'eleccions que el porten a obtenir en cada pas un òptim local, amb l'expectativa d'arribar a un òptim global. S'anomena "voraç" perquè en cada pas selecciona l'element més idoni que troba, sense tenir en compte l'efecte que aquesta decisió pot tenir en el futur (Brassard i Bratley, 1997:211).

Aquest tipus de plantejament acostuma a ésser fàcil d'implementar i, en alguns casos, força eficient, tot i que no garanteix sempre una solució, ni que la solució obtinguda sigui òptima. Aquest procediment s'utilitza sovint en problemes d'optimització per obtenir resultats acceptables, de manera ràpida. No obstant això, la complexitat inherent a certs problemes motiva que, de vegades, no es puguin resoldre correctament amb aquest enfocament tan matusser.

El primer en aplicar aquest mètode de càlcul va ésser Leonardo de Pisa (Fibonacci), a inicis del segle XIII, ja que li estalviava temps de càlcul i el permetia obtenir el valor fraccionari màxim en cada terme de l'expansió (Hoffman, 1998:155).

El procediment de càlcul de l'algoritme voraç comença amb l'obtenció de la primera fracció unitària dividint el denominador pel numerador, prenent la part entera resultant i sumant 1. Aquest serà el denominador de la primera fracció. Els passos a seguir són els següents:

1. Exemple:  $\frac{8}{11} \rightarrow \frac{11}{8} = 1,375 \rightarrow [\text{part entera}] = 1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \rightarrow [\text{primera fracció}] = \frac{1}{2}$

2. Al valor inicial se li resta la primera fracció:  $\frac{8}{11} - \frac{1}{2} = \frac{5}{22}$

3. S'aplica recursivament el punt 1 a aquesta nova fracció fins que el seu numerador sigui 1:

$$\frac{5}{22} \rightarrow \frac{22}{5} = 4,4 \rightarrow [\text{part entera}] = 4 \rightarrow 4 + 1 = 5 \rightarrow [\text{segona fracció}] = \frac{1}{5}$$

restem la segona fracció:  $\frac{5}{22} - \frac{1}{5} = \frac{3}{110}$  el numerador no és unitari, s'ha de continuar iterant:

$$\frac{3}{110} \rightarrow \frac{110}{3} = 36,666 \dots \rightarrow [\text{part entera}] = 36 \rightarrow 36 + 1 = 37 \rightarrow [\text{tercera fracció}] = \frac{1}{37}$$

restem la tercera fracció:  $\frac{3}{110} - \frac{1}{37} = \frac{1}{4070}$  → el numerador és unitari, aquesta serà la darrera fracció. Resultat final:

$$\frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{37} + \frac{1}{4070}$$

Tal com hem comentat, l'algoritme voraç no sempre ens porta a la solució òptima que, en aquest cas concret hem obtingut mitjançant el nostre programa **fe\_analisi.py**:

$$\frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$$

Sigui més o menys complicat, es demostra que tot nombre racional es pot desenvolupar en suma de fraccions egípcies. A més, si tenim en compte la següent identitat:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

cada terme unitari es pot continuar subdividint de manera indefinida. Així, doncs, a l'afirmació anterior hem d'afegir que el nombre de representacions unitàries en què es pot representar tot racional de la forma  $p/q$  és infinit (Hoffman, 1998:156).

Si multipliquem per dos els termes de la fórmula anterior obtenim:

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)}$$

relació que correspon al procediment de càlcul de l'algoritme voraç per a la taula  $2/n$  del pRhind. Si bé això demostra que tots els desenvolupaments tenen com a mínim una representació de dos termes, en examinar els resultats veurem que es tracta d'una aproximació força matussera, ja que el segon terme creix molt ràpidament i aviat resulta poc útil a efectes pràctics. Tal com veurem en analitzar els resultats obtinguts en la nostra recerca, a part dels valors inicials ( $2/3$ ,  $2/5$ ,  $2/7$  i  $2/9$ ), que són correctes, els denominadors creixen en progressió geomètrica, mentre que una anàlisi més acurada ens aporta resultats òptims més aptes per treballar amb aquest tipus de fraccions:

desenvolupament Rhind	suma	algoritme voraç	suma
$2/3 = 1/2 + 1/6$	8	$2/3 = 1/2 + 1/6$	8
$2/5 = 1/3 + 1/15$	18	$2/5 = 1/3 + 1/15$	18
$2/7 = 1/4 + 1/28$	32	$2/7 = 1/4 + 1/28$	32
$2/9 = 1/6 + 1/18$	24	$2/9 = 1/5 + 1/45$	50
$2/11 = 1/6 + 1/66$	72	$2/11 = 1/6 + 1/66$	72
$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$	164	$2/13 = 1/7 + 1/91$	98
$2/15 = 1/10 + 1/30$	40	$2/15 = 1/8 + 1/120$	128
$2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68$	131	$2/17 = 1/9 + 1/153$	162
$2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114$	202	$2/19 = 1/10 + 1/190$	200
.....			
$2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570$	1010	$2/95 = 1/48 + 1/4560$	4608
$2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$	1511	$2/97 = 1/49 + 1/4753$	4802
$2/99 = 1/66 + 1/198$	264	$2/99 = 1/50 + 1/4950$	5000
$2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$	1212	$2/101 = 1/51 + 1/5151$	5202

### 8.3. Anàlisi de la taula $2/n$

A l'annex 10.2 (pàgs. 62–66) mostrem els resultats obtinguts de la recerca realitzada sobre els valors presents a la taula  $2/n$  del recte del pRhind. Es tracta d'una llista de descomposicions en fraccions unitàries de les fraccions de numerador 2 i denominadors senars entre 3 i 101. A les diverses taules es presenten els desenvolupaments segons l'algoritme voraç i amb 2, 3 i 4 termes de longitud. Tot i que sembla que amb aquesta profunditat d'anàlisi ja n'hi ha suficient per a la taula  $2/n$ , queda pendent com a ampliació futura ampliar aquest rang d'estudi per determinar si en algun cas es poden obtenir millors resultats.

Els càlculs s'han dut a terme amb el programa **fe\_analisi.py** i han comportat un temps total de gairebé 40 hores. Tal com veiem al gràfic de l'apartat 10.2.5 (pàg. 66), el temps de càlcul creix en progressió geomètrica: per obtenir les dades de la fracció  $2/17$  només es triguen 5 segons, mentre que el darrer valor  $2/101$  va necessitar 4 hores i un quart. La següent captura de pantalla mostra l'abundant informació que ens aporta el programa sobre el global dels desenvolupaments possibles, així com els valors òptims i la seva estructura interna per tal d'ajudar a detectar regularitats en els resultats.

```

numerador: 2 = 2
denominador: 35 = 5x7

[Alg. vorac] 2/35 = 1/18 + 1/630 factors: [18,35] > suma: 648 [den. parells]
[Alg. vorac] 2/35 = 1/2x3^2 + 1/2x3^2x5x7

2/35 = 1/18 + 1/630 factors: [18,35] > suma: 648 [den. parells]
2/35 = 1/20 + 1/140 factors: [20,7] > suma: 160 [den. parells]
2/35 = 1/21 + 1/105 factors: [21,5] > suma: 126
2/35 = 1/30 + 1/42 > suma: 72 [den. parells]

4 fraccions trobades de 2 termes > 3 factoritzades

[fr. optima 2 termes] 2/35 = 1/30 + 1/42 > suma: 72 [den. parells]
- - - - - 2/35 = 1/2x3x5 + 1/2x3x7

176 fraccions trobades de 3 termes > 9 factoritzades

[fr. optima 3 termes] 2/35 = 1/42 + 1/55 + 1/66 > suma: 163
- - - - - 2/35 = 1/2x3x7 + 1/5x11 + 1/2x3x11
[opt. d.parells 3 t.] 2/35 = 1/40 + 1/56 + 1/70 > suma: 166 [den. parells]
- - - - - 2/35 = 1/2^3x5 + 1/2^3x7 + 1/2x5x7

26111 fraccions trobades de 4 termes > 47 factoritzades

[fr. optima 4 termes] 2/35 = 1/56 + 1/70 + 1/72 + 1/90 > suma: 288 [den. parells]
- - - - - 2/35 = 1/2^3x7 + 1/2x5x7 + 1/2^3x3^2 + 1/2x3^2x5

Fraccio optima: 2 termes > suma: 72
Temps emprat: 30 segons

```

Els resultats obtinguts aporten molta informació a l'hora d'avaluar la dificultat d'obtenir valors òptims en els desenvolupaments presents al papir, que suposem que són resultat d'un procés experimental de prova i error que va comportar diversos segles. També posen de manifest diverses regularitats aprofitades pels escribes que resolen alguns casos de manera satisfactòria, però no òptima, per tal d'evitar un estudi més exhaustiu i prolix que els podia comportar mesos o anys de càlcul. Els patrons matemàtics trobats mitjançant l'aplicació repetida dels càlculs es va concretar en taules com les del pRhind o el Rull de Cuïro.

Tal com detalla Gillings (1982:49) en analitzar els criteris de selecció de la descomposició en fraccions egípcies, a la taula del pRhind s'intenta desplegar les fraccions de numerador 2 en el mínim nombre de termes possible, cosa que no sempre s'aconsegueix de manera òptima, amb els denominadors mínims i, preferentment, parells. El denominador màxim que hi trobem és 890, corresponent al desenvolupament:  $2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890$ , cosa que fa pensar que es devia prendre 1000 com a límit.

Com a resum de les taules detallades de l'annex 10.2 (pàgs. 62–66) mostrarem la següent llista que les resumeix i compara els valors presents al papir amb els òptims obtinguts per mitjans informàtics. A la part dreta de la relació hi hem inclòs la descomposició en factors primers dels denominadors dels desenvolupaments objecte d'estudi. Tal com veurem a continuació, la complexitat interna dels nombres a analitzar és determinant a l'hora d'interpretar els resultats.

n	desenvolupament Rhind	suma	òptima	suma	n	divisors de n
3	$2/3 = 1/2 + 1/6$	8	$2/3 = 1/2 + 1/6$	8	3	primer
5	$2/5 = 1/3 + 1/15$	18	$2/5 = 1/3 + 1/15$	18	5	primer
7	$2/7 = 1/4 + 1/28$	32	$2/7 = 1/4 + 1/28$	32	7	primer
9	$2/9 = 1/6 + 1/18$	24	$2/9 = 1/6 + 1/18$	24	9	3 x 3

11	$2/11 = 1/6 + 1/66$	72	$2/11 = 1/6 + 1/66$	72	11	primer
13	$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$	164	$2/13 = 1/7 + 1/91$	98	13	primer
15	$2/15 = 1/10 + 1/30$	40	$2/15 = 1/12 + 1/20$	32	15	3 x 5
17	$2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68$	131	$2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68$	131	17	primer
19	$2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114$	202	$2/19 = 1/14 + 1/38 + 1/133$	185	19	primer
21	$2/21 = 1/14 + 1/42$	56	$2/21 = 1/15 + 1/35$	50	21	3 x 7
23	$2/23 = 1/12 + 1/276$	288	$2/23 = 1/23 + 1/46 + 1/69 + 1/138$	276	23	primer
25	$2/25 = 1/15 + 1/75$	90	$2/25 = 1/15 + 75$	90	25	5 x 5
27	$2/27 = 1/18 + 1/54$	72	$2/27 = 1/18 + 1/54$	72	27	3 x 3 x 3
29	$2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$	488	$2/29 = 1/30 + 1/58 + 1/87 + 1/145$	320	29	primer
31	$2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155$	299	$2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155$	299	31	primer
33	$2/33 = 1/22 + 1/66$	88	$2/33 = 1/22 + 1/66$	88	33	3 x 11
35	$2/35 = 1/30 + 1/42$	72	$2/35 = 1/30 + 1/42$	72	35	5 x 7
37	$2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296$	431	$2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296$	431	37	primer
39	$2/39 = 1/26 + 1/78$	104	$2/39 = 1/26 + 1/78$	104	39	3 x 13
41	$2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328$	598	$2/41 = 1/41 + 1/82 + 1/123 + 1/246$	492	41	primer
43	$2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301$	558	$2/43 = 1/43 + 1/86 + 1/129 + 1/258$	516	43	primer
45	$2/45 = 1/30 + 1/90$	120	$2/45 = 1/36 + 1/60$	96	45	3 x 3 x 5
47	$2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470$	641	$2/47 = 1/47 + 1/94 + 1/141 + 1/282$	564	47	primer
49	$2/49 = 1/28 + 1/196$	224	$2/49 = 1/28 + 1/196$	224	49	7 x 7
51	$2/51 = 1/34 + 1/102$	136	$2/51 = 1/34 + 1/102$	136	51	3 x 17
53	$2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795$	1143	$2/53 = 1/53 + 1/106 + 1/159 + 1/318$	636	53	primer
55	$2/55 = 1/30 + 1/330$	360	$2/55 = 1/40 + 1/88$	128	55	5 x 11
57	$2/57 = 1/38 + 1/114$	152	$2/57 = 1/38 + 1/114$	152	57	3 x 19
59	$2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531$	803	$2/59 = 1/59 + 1/118 + 1/177 + 1/354$	708	59	primer
61	$2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610$	1382	$2/61 = 1/61 + 1/122 + 1/183 + 1/366$	732	61	primer
63	$2/63 = 1/42 + 1/126$	168	$2/63 = 1/56 + 1/72$	128	63	3 x 3 x 7
65	$2/65 = 1/39 + 1/195$	234	$2/65 = 1/45 + 1/117$	162	65	5 x 13
67	$2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536$	911	$2/67 = 1/67 + 1/134 + 1/201 + 1/402$	804	67	primer
69	$2/69 = 1/46 + 1/138$	184	$2/69 = 1/46 + 1/138$	184	69	3 x 23
71	$2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710$	1318	$2/71 = 1/71 + 1/142 + 1/213 + 1/426$	852	71	primer
73	$2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365$	936	$2/73 = 1/73 + 1/146 + 1/219 + 1/438$	876	73	primer
75	$2/75 = 1/50 + 1/150$	200	$2/75 = 1/60 + 100$	160	75	3 x 5 x 5
77	$2/77 = 1/44 + 1/308$	352	$2/77 = 1/63 + 99$	162	77	7 x 11
79	$2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790$	1403	$2/79 = 1/79 + 1/158 + 1/237 + 1/474$	948	79	primer
81	$2/81 = 1/54 + 1/162$	216	$2/81 = 1/54 + 1/162$	216	81	3 x 3 x 3 x 3
83	$2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498$	1305	$2/83 = 1/83 + 1/166 + 1/249 + 1/498$	996	83	primer
85	$2/85 = 1/51 + 1/255$	306	$2/85 = 1/55 + 187$	242	85	5 x 17
87	$2/87 = 1/58 + 1/174$	232	$2/87 = 1/58 + 174$	232	87	3 x 19
89	$2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890$	1840	$2/89 = 1/89 + 1/178 + 1/267 + 1/534$	1068	89	primer
91	$2/91 = 1/70 + 1/130$	200	$2/91 = 1/70 + 1/130$	200	91	7 x 13
93	$2/93 = 1/62 + 1/186$	248	$2/93 = 1/62 + 186$	248	93	3 x 31
95	$2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570$	1010	$2/95 = 1/60 + 228$	288	95	5 x 19
97	$2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$	1511	$2/97 = 1/97 + 1/194 + 1/291 + 1/582$	1164	97	primer
99	$2/99 = 1/66 + 1/198$	264	$2/99 = 1/90 + 110$	200	99	3 x 3 x 11
101	$2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$	1212	$2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$	1212	101	primer

Una regularitat interessant i que afecta a un terç dels valors presentats la trobem al problema 61 del pRhind (Buffum, 1927:100). El text comença amb unes taules d'ajuda a la multiplicació i ens revela un procediment per calcular la multiplicació de  $2/3$  per l'invers de qualsevol nombre senar  $n$ :

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$$

Aquesta fórmula és particularment interessant perquè ens revela el mètode de càlcul d'alguns valors de la taula  $2/n$  del recte del paper, en concret, els que a la relació precedent s'ajusten a l'interval  $1 \leq n \leq 33$ , per a  $n$  senar. Es tracta de 17 valors que es resolen amb un desenvolupament de dos termes i que en ésser producte de nombres parells, també donen com a resultat denominadors parells, amb l'avantatge pràctic que això comporta a l'hora de multiplicar i dividir per dos. Dels 17 valors, 11 són òptims i els sis restants no queden gaire lluny. En cap moment es revela la justificació de la fórmula, que probablement va ésser fruit de l'experiència acumulada pels escribes al llarg des segles i de la seva habilitat a l'hora de detectar regularitats en els complicats càlculs amb fraccions. De fet, a la taula  $2/n$  aquest patró serveix per un de cada tres valors presents:

n	n x 3	pRhind	suma	òptima	suma
1	3	$2/3 = 1/2 + 1/6$	8	$2/3 = 1/2 + 1/6$	8
3	9	$2/9 = 1/6 + 1/18$	24	$2/9 = 1/6 + 1/18$	24
5	15	$2/15 = 1/10 + 1/30$	40	$2/15 = 1/12 + 1/20$	32
7	21	$2/21 = 1/14 + 1/42$	56	$2/21 = 1/15 + 1/35$	50
9	27	$2/27 = 1/18 + 1/54$	72	$2/27 = 1/18 + 1/54$	72
11	33	$2/33 = 1/22 + 1/66$	88	$2/33 = 1/22 + 1/66$	88
13	39	$2/39 = 1/26 + 1/78$	104	$2/39 = 1/26 + 1/78$	104
15	45	$2/45 = 1/30 + 1/90$	120	$2/45 = 1/36 + 1/60$	96
17	51	$2/51 = 1/34 + 1/102$	136	$2/51 = 1/34 + 1/102$	136
19	57	$2/57 = 1/38 + 1/114$	152	$2/57 = 1/38 + 1/114$	152
21	63	$2/63 = 1/42 + 1/126$	168	$2/63 = 1/56 + 1/72$	128
23	69	$2/69 = 1/46 + 1/138$	184	$2/69 = 1/46 + 1/138$	184
25	75	$2/75 = 1/50 + 1/150$	200	$2/75 = 1/60 + 1/100$	160
27	81	$2/81 = 1/54 + 1/162$	216	$2/81 = 1/54 + 1/162$	216
29	87	$2/87 = 1/58 + 1/174$	232	$2/87 = 1/58 + 1/174$	232
31	93	$2/93 = 1/62 + 1/186$	248	$2/93 = 1/62 + 1/186$	248
33	99	$2/99 = 1/66 + 1/198$	264	$2/99 = 1/90 + 1/110$	200

Aplicant aquest criteri és molt fàcil ultrapassar els valors del paper i calcular una gran quantitat de desenvolupaments que compleixen aquesta condició, que finalitzaria amb  $2/495$  abans de superar la barrera psicològica del nombre 1000 al denominador:

n	n x 3	valor teòric	suma	òptima	suma
35	105	$2/105 = 1/70 + 1/210$	280	$2/105 = 1/90 + 1/126$	216
37	111	$2/111 = 1/74 + 1/222$	296	$2/111 = 1/74 + 1/222$	296
39	117	$2/117 = 1/78 + 1/234$	312	$2/117 = 1/99 + 1/143$	242
41	123	$2/123 = 1/82 + 1/246$	328	$2/123 = 1/82 + 1/246$	328
43	129	$2/129 = 1/86 + 1/258$	344	$2/129 = 1/86 + 1/258$	344
45	135	$2/135 = 1/90 + 1/270$	360	$2/135 = 1/108 + 1/180$	288
47	141	$2/141 = 1/94 + 1/282$	376	$2/141 = 1/94 + 1/282$	376
.....	.....	.....	.....	.....	.....
165	495	$2/495 = 1/330 + 1/990$	1320	$2/495 = 1/450 + 1/550$	1000
167	501	$2/501 = 1/334 + 1/1002$	1336	$2/501 = 1/334 + 1/1002$	1336

Un altre grup que també presenta regularitats en els seus desenvolupament és el de certs múltiples de cinc (Clagett, 1999:31). En efecte, a part d'aquells que són múltiples de tres (15, 45 i 75), i que obeeixen a l'esquema anterior, s'observa un patró numèric derivat del paradigma inicial 2/5:

$$\frac{2}{5n} = \frac{1}{3n} + \frac{1}{15n}$$

Aquest seria el cas de  $n=5$ ,  $n=13$  i  $n=17$ :  $\frac{2}{25} = \frac{2}{5 \cdot 5} = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{15 \cdot 5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$

De manera anàloga:  $\frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$  i  $\frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255}$

La taula d'aquestes fraccions és la següent:

N	desenvolupament Rhind	suma	òptima	suma	N	divisors de n
5	$2/5 = 1/3 + 1/15$	18	$2/5 = 1/3 + 1/15$	18	5	primer
15	$2/15 = 1/10 + 1/30$	40	$2/15 = 1/12 + 1/20$	32	15	3 x 5
25	$2/25 = 1/15 + 1/75$	90	$2/25 = 1/15 + 1/75$	90	25	5 x 5
35	$2/35 = 1/30 + 1/42$	72	$2/35 = 1/30 + 1/42$	72	35	5 x 7
45	$2/45 = 1/30 + 1/90$	120	$2/45 = 1/36 + 1/60$	96	45	3 x 3 x 5
55	$2/55 = 1/30 + 1/330$	360	$2/55 = 1/40 + 1/88$	128	55	5 x 11
65	$2/65 = 1/39 + 1/195$	234	$2/65 = 1/45 + 1/117$	162	65	5 x 13
75	$2/75 = 1/50 + 1/150$	200	$2/75 = 1/60 + 1/100$	160	75	3 x 5 x 5
85	$2/85 = 1/51 + 1/255$	306	$2/85 = 1/55 + 1/187$	242	85	5 x 17
95	$2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570$	1010	$2/95 = 1/60 + 1/228$	288	95	5 x 19

Una pauta similar afecta a 2 múltiples de set (49 i 77) (Clagett, 1999:31). Com en el cas anterior, a part d'aquells que són múltiples de tres (21 i 63) i de cinc (35), s'observa un patró numèric derivat del paradigma inicial 2/7:

$$\frac{2}{7n} = \frac{1}{4n} + \frac{1}{28n}$$

Aquests serien els casos de  $n=7$ :  $\frac{2}{49} = \frac{2}{7 \cdot 7} = \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{28 \cdot 7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196}$

i  $n=11$ :  $\frac{2}{77} = \frac{2}{7 \cdot 11} = \frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{28 \cdot 11} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308}$

Una altra qüestió interessant és el mateix límit de la taula. Per què finalitza amb 101? Si en comptes de justificar la veracitat dels denominadors unitaris emprats en cada cas, l'autor s'hagués limitat a mostrar uns valors comprovats i que havien demostrat la seva eficàcia al llarg dels segles, al recte del pRhind hi hauria hagut prou espai com per consignar-ne uns quants més. També és veritat que el nostre interès es focalitzaria en aquesta punt, fos quin fos el darrer dels desenvolupaments presents. Potser cal abordar el tema des d'una perspectiva més humil i respectuosa amb la ingent tasca de còmput manual que van haver de dur a terme els escribes egipcis durant moltes generacions. És fàcil perdre de vista aquest fet quan se disposa de potents mitjans de càlcul que permeten abordar tasques impensables per a l'època que estudiem. Si ja arribar-hi a 2/101 pot suposar una veritable proesa tenint en compte els mitjans de l'època, hem de valorar-ho de manera justa, interpretant-ho com una limitació del seu sistema, de la mateixa manera que els nostres ordinadors també tenen unes limitacions que seran àmpliament superades per les generacions futures.

De totes maneres, a nivell purament especulatiu, ens hem plantejat en aquest treball el fet d'estendre la taula i realitzar els càlculs informàtics més enllà del valor 101 del pRhind, fixant-nos la condició de que el major dels denominadors fos sempre inferior a 1000. A la taula següent es mostren els resultats obtinguts que, a més, ens aportaran informació addicional sobre certes pautes dels desenvolupaments de les fraccions.

n	divisors	valor òptim	nº termes	suma
103	primer	$2/103 = 1/103 + 1/206 + 1/309 + 1/618$	4	1236
105	3 x 5 x 7	$2/105 = 1/90 + 1/126$	2	216
107	primer	$2/107 = 1/107 + 1/214 + 1/321 + 1/642$	4	1284
109	primer	$2/109 = 1/109 + 1/218 + 1/327 + 1/654$	4	1308
111	3 x 37	$2/111 = 1/74 + 1/222$	2	296
113	primer	$2/113 = 1/113 + 1/226 + 1/339 + 1/678$	4	1356
115	5 x 23	$2/115 = 1/70 + 1/322$	2	392
117	3 x 3 x 13	$2/117 = 1/99 + 1/143$	2	242
119	7 x 17	$2/119 = 1/84 + 1/204$	2	288
121	11 x 11	$2/121 = 1/66 + 1/726$	2	792
123	3 x 41	$2/123 = 1/82 + 1/246$	2	328
125	5 x 5 x 5	$2/125 = 1/75 + 1/375$	2	450
127	primer	$2/127 = 1/127 + 1/254 + 1/381 + 1/762$	4	1524
129	3 x 43	$2/129 = 1/86 + 1/258$	2	344
131	primer	$2/131 = 1/131 + 1/262 + 1/393 + 1/786$	4	1572
133	7 x 19	$2/133 = 1/91 + 1/247$	2	338
135	3 x 3 x 5	$2/135 = 1/108 + 1/180$	2	288
137	primer	$2/137 = 1/137 + 1/274 + 1/411 + 1/822$	4	1644
139	primer	$2/139 = 1/139 + 1/278 + 1/417 + 1/834$	4	1668
141	3 x 47	$2/141 = 1/66 + 1/726$	2	792
143	11 x 13	$2/143 = 1/132 + 1/156$	2	288
145	5 x 29	$2/145 = 1/87 + 1/435$	2	522
147	3 x 7 x 7	$2/147 = 1/105 + 1/245$	2	350
149	primer	$2/149 = 1/149 + 1/298 + 1/447 + 1/894$	4	1788
151	primer	$2/151 = 1/151 + 1/302 + 1/453 + 1/906$	4	1812
153	3 x 3 x 17	$2/153 = 1/117 + 1/221$	2	338
155	5 x 31	$2/155 = 1/93 + 1/465$	2	558
157	primer	$2/157 = 1/157 + 1/314 + 1/471 + 1/942$	4	1884
159	3 x 53	$2/159 = 1/106 + 1/318$	2	424
161	7 x 23	$2/161 = 1/105 + 1/345$	2	450
163	primer	$2/163 = 1/163 + 1/326 + 1/489 + 1/978$	4	1956
165	3 x 5 x 11	$2/165 = 1/143 + 1/195$	2	338
167	primer	$2/167 = 1/167 + 1/334 + 1/501 + 1/1002$	4	2004
169	13 x 13	$2/169 = 1/91 + 1/1183$	2	1274

L'anàlisi detallada de la taula del recte del pRhind que fa Richard Gillings (1982:45-80) presenta notables discrepàncies respecte als nostres resultats basats en les aplicacions informàtiques desenvolupades per al present treball. És una mica desconcertant que porti dades provinents d'una anàlisi numèrica realitzada a la Universitat de Sydney al 1967 (15 anys abans!) i que aquestes siguin

força incompletes. Tot i el rigor i la precisió a l'hora d'interpretar les dades, sovint no disposa de totes les possibilitats existents ni compta amb els valors òptims de tots els desenvolupaments. Així, a la plana 63, Gillings informa que  $2/55$  té 3 descomposicions de dos termes, 73 de tres i 1052 de quatre, quan els valors correctes són 4, 214 i 51532 respectivament.

Tot i això, de l'anàlisi de Gillings cal destacar un fet interessant que l'autor esmenta superficialment a la plana 69 i que, en observar amb atenció la taula anterior, considerem força rellevant. Es tracta d'una formulació general de quatre termes per a qualsevol valor de la taula  $2/n$  i que es basa en un altre desenvolupament en fraccions conegut pels escribes egipcis a l'hora de combinar fraccions unitàries. La formulació en qüestió té a veure amb l'única manera de descompondre la unitat en tres termes:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

Com que la taula objecte d'estudi té 2 com a numerador, podem afirmar:  $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

En dividir les dues parts d'aquesta identitat per qualsevol nombre enter obtenim aquesta interessant fórmula:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$$

Gillings esmenta aquest cas perquè apareix al darrer valor de la taula del recte del pRhind:  $2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$ . A partir d'aquí, als resultats obtinguts observem que aquest patró va apareixent sovint quan anem més enllà del darrer element i continuem la taula fins que trobem un denominador que superi el valor 1000. Així, doncs, si ens fixem en la taula anterior veurem que tots els desenvolupaments on el denominador és un nombre primer s'ajusten a aquest esquema d'expansió en fraccions egípcies.

Finalitzem l'estudi de la taula  $2/n$  del pRhind remarcant un fet rellevant en el desenvolupament en fraccions unitàries dels valors analitzats: la importància de la descomposició en factors primers del denominador. Per això s'observen patrons similars i solucions més senzilles en els casos en què els denominadors es poden descompondre en divisors i, en canvi, aquells que són primers presenten un major nombre de termes, complexitat i valors més elevats.

#### 8.4. Anàlisi informàtica de la taula dels 9 primers nombres dividits per 10 del papir Rhind

Després de la taula  $2/n$  i just abans del primer problema del pRhind (Buffum, 1927:60) hi trobem una llista dels primers deu nombres dividits per 10, expressats en fraccions egípcies. Seguint la línia general del mètode aplicat pels escribes en aquest tipus de càlculs només cal comentar que, un cop analitzada emprant el nostre programa `fe_analisi.py`, els resultats són força correctes i gairebé òptims en tots els casos, com correspon als desenvolupaments on els nombres que intervenen són petits. El nombre reduït de casos i la senzillesa de les xifres no requereixen comentaris addicionals.

n	pRhind	suma	valor òptim amb 2/3	valor òptim	suma	comentaris
1/10	1/10	—	—	1/10	—	
2/10	1/5	—	—	1/5	—	
3/10	1/5 + 1/10	20	—	1/5 + 1/10	20	

<b>4/10</b>	$1/3 + 1/15$	18	—	$1/3 + 1/15$	18	$4/10 = 2/5$
<b>5/10</b>	$1/2$		—	$1/2$	—	
<b>6/10</b>	$1/2 + 1/10$	12	—	$1/2 + 1/10$	12	$6/10 = 3/5$
<b>7/10</b>	$2/3 + 1/30$	—	$2/3 + 1/30$	$1/2 + 1/5$	7	valor unitari molt més senzill
<b>8/10</b>	$2/3 + 1/10 + 1/30$	—	$2/3 + 1/12 + 1/20$	$1/2 + 1/5 + 1/10$	17	$8/10 = 4/5$ . Valor unitari més senzill. El valor amb $2/3$ del paper no és òptim
<b>9/10</b>	$2/3 + 1/5 + 1/30$	—	$2/3 + 1/6 + 1/15$	$1/2 + 1/3 + 1/15$	20	valor unitari més senzill. El valor amb $2/3$ del paper no és òptim

### 8.5. Anàlisi informàtica de la taula de multiplicació de fraccions del problema 61 del paper Rhind

El problema 61 del pRhind (Buffum, 1927:100) comença amb una llista de multiplicacions de fraccions amb els seus corresponents resultats expressats en fraccions egípcies. Com la taula anterior, també l'hem sotmès a la mateixa anàlisi emprant el nostre programa `fe_analisi.py`. Un cop més els resultats són correctes i gairebé òptims en tots els casos. Diversos exemples corresponen a fraccions de la taula  $2/n$  i, òbviament, presenten els mateixos resultats. Altres casos donen com a resultat una fracció unitària que no cal desplegar més, excepte la quarta línia on la fracció irreductible és  $1/9$  i es desplega de manera òptima en altres dues fraccions unitàries.

Cal interpretar la presència d'aquest tipus de taules com a ajuda per trobar simplificacions en els càlculs i escurçar el nombre final de termes de les operacions aritmètiques amb fraccions. Sense res més per afegir al respecte, mostrem a continuació els resultats tabulats.

<b>n x n</b>	<b>= n</b>	<b>pRhind</b>	<b>suma</b>	<b>valor òptim</b>	<b>suma</b>	<b>comentaris</b>
$2/3 \times 2/3$	$4/9$	$1/3 + 1/9$	12	$1/3 + 1/9$	12	
$1/3 \times 2/3$	$2/9$	$1/6 + 1/18$	24	$1/6 + 1/18$	24	coincideix amb $2/9$ de la taula $2/n$
$2/3 \times 1/3$	$2/9$	$1/6 + 1/18$	24	$1/6 + 1/18$	24	ídem anterior ( propietat commutativa de la multiplicació)
$2/3 \times 1/6$	$1/9$	$1/12 + 1/36$	48	$1/12 + 1/36$	48	és estrany que desplegui $1/9$ , que ja és unitari, però és correcte
$2/3 \times 1/2$	$1/3$	$1/3$		$1/3$		
$1/3 \times 1/2$	$1/6$	$1/6$		$1/6$		
$1/6 \times 1/2$	$1/12$	$1/12$		$1/12$		
$1/12 \times 1/2$	$1/24$	$1/24$		$1/24$		
$1/9 \times 2/3$	$2/27$	$1/18 + 1/54$	72	$1/18 + 1/54$	72	coincideix amb $2/27$ de la taula $2/n$
$2/3 \times 1/9$	$2/27$	$1/18 + 1/54$	72	$1/18 + 1/54$	72	ídem anterior ( propietat commutativa de la multiplicació)
$1/4 \times 1/5$	$1/20$	$1/20$		$1/20$		
$2/3 \times 1/7$	$2/21$	$1/14 + 1/42$	56	$1/15 + 1/35$	50	coincideix amb $2/21$ de la taula $2/n$ , l'òptim és una mica millor però amb denominadors senars

$1/2 \times 1/7$	$1/14$	$1/14$		$1/14$		
$2/3 \times 1/11$	$2/33$	$1/22 + 1/66$	88	$1/22 + 1/66$	88	coincideix amb $2/33$ de la taula $2/n$
$1/3 \times 1/11$	$1/33$	$1/33$		$1/33$		
$1/2 \times 1/11$	$1/22$	$1/22$		$1/22$		
$1/4 \times 1/11$	$1/44$	$1/44$		$1/44$		

## 8.6. Anàlisi informàtica dels valors unitaris del Rull de Cuiro.

Un altre testimoni rellevant per a l'estudi de la matemàtica egípcia és l'anomenat *Rull de Cuiro*, esmentat a la secció 2.4.3 (pàgina 12). El text d'aquest document consisteix en diverses línies que despleguen fraccions unitàries en diverses taules, algunes d'elles repetides. Per això es pensa que es podria tractar d'una mena de quadern d'exercicis d'un aprenent a escriba (Gillings, 1982:89 i ss).

El fet de disposar de desplegaments de fraccions que ja són unitàries ens aporta una interessant informació sobre els mètodes amb què els escribes treballaven amb les fraccions. Així, cal suposar que aquestes taules ajudaven en les tasques d'agrupar conjunts de fraccions. Per exemple, tal com veiem a la llista següent, si l'escriba es trobava amb  $1/40 + 1/42 + 1/56$ , amb l'ajuda de la taula podia substituir aquestes tres fraccions per  $1/15$ , que a la seva vegada es podia combinar amb altres agrupacions fins a assolir el resultat més compacte possible.

Com en els casos anteriors, els valors de la taula s'han analitzat un a un amb el nostre programa **fe\_analisi.py**. A continuació mostrem una taula on els llistem juntament amb els comentaris pertinents.

fracció	valor òptim amb els mateixos termes	comentaris	valor òptim absolut
$1/8 = 1/10 + 1/40$	$1/8 = 1/12 + 1/24$	valor òptim amb denominadors parells, i que apareix unes línies més avall	$1/8 = 1/12 + 1/24$
$1/4 = 1/5 + 1/20$	$1/4 = 1/6 + 1/12$	valor òptim amb denominadors parells	$1/4 = 1/6 + 1/12$
$1/3 = 1/4 + 1/12$	$1/3 = 1/4 + 1/12$	la fracció és òptima	$1/3 = 1/4 + 1/12$
$1/5 = 1/10 + 1/10$	—	simplificació per duplicació	—
$1/3 = 1/6 + 1/6$	—	simplificació per duplicació	—
$1/2 = 1/6 + 1/6 + 1/6$	—	simplificació per duplicació	—
$2/3 = 1/3 + 1/3$	—	simplificació per duplicació	—
$1/8 = 1/15 + 1/25 + 1/75 + 1/200$	$1/8 = 1/24 + 1/30 + 1/36 + 1/45$	fracció $1/8$ amb quatre termes	$1/8 = 1/12 + 1/24$
$1/16 = 1/30 + 1/50 + 1/150 + 1/400$	$1/16 = 1/55 + 1/60 + 1/66 + 1/80$	fracció $1/16$ amb quatre termes: es limita a dividir $1/8$ per 2 (multiplicar denominadors per 2)	$1/16 = 1/24 + 1/48$
$1/15 = 1/25 + 1/50 + 1/150$	$1/15 = 1/40 + 1/42 + 1/56$	fracció $1/15$ amb tres termes. La fracció òptima té denominadors parells	$1/15 = 1/24 + 1/40$

$1/6 = 1/9 + 1/18$	$1/6 = 1/10 + 1/15$	fracció òptima molt similar. Si volem denominadors parells: $1/6 = 1/8 + 1/24$ , també molt bona	$1/6 = 1/10 + 1/15$
$1/4 = 1/7 + 1/14 + 1/28$	$1/4 = 1/10 + 1/12 + 1/15$	Si volem denominadors parells: $1/4 = 1/8 + 1/12 + 1/24$ , millor que la proposada	$1/4 = 1/6 + 1/12$
$1/8 = 1/12 + 1/24$	$1/8 = 1/12 + 1/24$	la fracció és òptima	$1/8 = 1/12 + 1/24$
$1/7 = 1/14 + 1/21 + 1/42$	$1/4 = 1/15 + 1/21 + 1/35$	valor òptim molt similar, però amb tots els denominadors senars	$1/7 = 1/8 + 1/56$
$1/9 = 1/18 + 1/27 + 1/54$	$1/9 = 1/21 + 1/28 + 1/36$	Si volem denominadors parells: $1/9 = 1/20 + 1/30 + 1/36$ , millor que la proposada	$1/9 = 1/12 + 1/36$
$1/11 = 1/22 + 1/33 + 1/66$	$1/11 = 1/20 + 1/44 + 1/55$	valor òptim molt similar, també amb un denominador senar	$1/11 = 1/20 + 1/44 + 1/55$
$1/13 = 1/28 + 1/49 + 1/196 ?$	$1/13 = 1/26 + 1/39 + 1/78$	<b>valor erroni</b>	$1/13 = 1/26 + 1/39 + 1/78$
$1/15 = 1/30 + 1/45 + 1/90$	$1/15 = 1/40 + 1/42 + 1/56$	fracció $1/15$ amb tres termes. La fracció òptima té denominadors parells	$1/15 = 1/24 + 1/40$
$1/16 = 1/24 + 1/48$	$1/16 = 1/24 + 1/48$	fracció $1/16$ amb dos termes: es limita a dividir el resultat òptim de $1/8$ per 2 (multiplicar denominadors per 2)	$1/16 = 1/24 + 1/48$
$1/12 = 1/18 + 1/36$	$1/12 = 1/21 + 1/28$	fracció $1/12$ amb dos termes: es limita a dividir $1/6$ per 2 (multiplicar denominadors per 2)	$1/12 = 1/21 + 1/28$
$1/14 = 1/21 + 1/42$	$1/14 = 1/21 + 1/42$	la fracció és òptima	$1/14 = 1/21 + 1/42$
$1/30 = 1/45 + 1/90$	$1/30 = 1/55 + 1/66$	valor òptim molt similar, també amb un denominador senar i l'altre parell	$1/30 = 1/55 + 1/66$
$1/20 = 1/30 + 1/60$	$1/30 = 1/36 + 1/45$	valor òptim similar, però amb un denominador senar	$1/30 = 1/36 + 1/45$
$1/10 = 1/15 + 1/30$	$1/10 = 1/15 + 1/30$	la fracció és òptima	$1/10 = 1/15 + 1/30$
$1/32 = 1/48 + 1/96$	$1/32 = 1/48 + 1/96$	la fracció és òptima	$1/32 = 1/48 + 1/96$
$1/64 = 1/96 + 1/192$	$1/64 = 1/96 + 1/192$	la fracció és òptima	$1/64 = 1/96 + 1/192$

## 9. Conclusions

### 9.1. Desenvolupament del treball

Tal com hem esmentat a l'inici del present treball, l'objectiu principal era esbrinar les capacitats operatives de la matemàtica egípcia com a eina útil al servei de la societat. Per això, a mida que aprofundíem en l'estudi de l'operativa de càlcul dels escribes, hem anat desenvolupant aplicacions informàtiques per reproduir-los seguint les mateixes tècniques i així ampliar l'abast de l'estudi. A més, per comprovar l'exactitud i la idoneïtat de les propostes que trobem als problemes dels papirs, hem dut a terme una recerca consistent en una anàlisi detallada de les taules de fraccions que hem trobat, qüestió que ens ha portat moltes hores de càlcul en un potent ordinador actual.

Tal com hem esmentat suara, per facilitar l'accés lliure al programari i als resultats hem creat un lloc web ubicat a l'adreça:

[http://www.peregarcia.cat/m\\_egipte.htm](http://www.peregarcia.cat/m_egipte.htm)

A partir d'una plana general <sup>13</sup> es facilita l'accés a les diferents aplicacions disponibles i als resultats tabulats de la recerca. En el cas dels programes s'explica breument la seva utilitat i es mostren diverses captures de pantalles que il·lustren el seu funcionament. Cal remarcar que la realització d'aquestes planes de suport ha anat paral·lela al desenvolupament del treball, enriquint-se a mida que s'ampliava el ventall d'aplicacions i finalitzant amb la inclusió de les taules de resultats i unes imatges d'exemple del pRhind que hem escanejat de la secció de làmines del llibre de Robins i Shute (1987:plates). Un cop obtinguts els resultats de la recerca, s'han interpretat des d'un punt de vista matemàtic, però sempre tenint en compte el rerefons de les limitacions dels escribes quant a notació numèrica i plantejament de les operacions de càlcul. Els resultats de la recerca es troben a l'apartat 8 <sup>14</sup> i a l'annex 10.2. <sup>15</sup>

L'anàlisi de les dades obtingudes ha permès detectar patrons i regularitats en els càlculs que expliquen per què els escribes adoptaven determinades solucions a l'hora de tractar les fraccions egípcies, en comptes d'altres més idònies. A més, el fet d'anar més enllà d'investigar els valors tabulats al pRhind i estendre el rang de recerca, també ens ha permès demostrar la fortalesa de les nostres aplicacions informàtiques i deduir o confirmar altres patrons de càlcul que, amb la lògica limitació del paper, d'entrada no s'observaven clarament. Així, doncs, es pot afirmar que sobre matemàtica egípcia hi ha força camí per recórrer. De fet hi ha moltes llacunes, tant respecte al seu marc teòric, com a les seves aplicacions pràctiques. Tampoc es pot descartar que a mitjà o llarg termini puguin aparèixer nous elements a avaluar i és interessant tenir eines per a analitzar les dades.

A mida que avançava el treball i s'aprofundia en l'estudi d'aquests mètodes de càlcul tan particulars hem pogut comprovar que, en alguns problemes dels papirs, certes operacions menys comunes com l'arrel quadrada s'introduïen aportant el seu valor sense cap mena de justificació. Com que suposem que hi devia existir algun mètode pràctic per realitzar aquesta mena de càlculs, hem deduït i proposat un mètode teòric totalment en consonància amb la metodologia general egípcia.

El treball també ha servit per detectar alguns errors o inexactituds presents en els papirs, així com per plantejar possibles línies de treball posteriors, vist que es tracta d'un tema prou interessant i ampli, i no massa conegut, fins i tot, pels especialistes.

---

<sup>13</sup> veure l'apartat 10.1 a la pàg. 61.

<sup>14</sup> pàgs. 45–57, corresponents a l'anàlisi informàtica de les taules dels papirs.

<sup>15</sup> pàgs. 62–66, corresponents als resultats tabulats.

## 9.2. Línies d'investigació futures per aprofundir en l'estudi de la temàtica

La feina realitzada ha aportat tot un conjunt d'eines i resultats que es poden considerar com a punt de partida per anar més lluny en l'estudi de la matemàtica egípcia. L'experiència assolida amb el present treball també ens ha servit per plantejar diverses línies de recerca futura:

- Caldria plantejar una millora i optimització de la capacitat de càlcul dels programes desenvolupats, sobretot aquells que basen la seva recerca en l'exploració iterativa de solucions als problemes plantejats. En abordar el desenvolupament de fraccions aviat hem vist que el temps de procés es disparava seguint una progressió geomètrica. Per exemple, analitzar el cas  $2/137$  amb 4 termes pot portar unes 10 hores de càlcul en un ordinador relativament avançat (Intel I7). Per raons de temps i de complexitat, la primera aproximació es basa en tractar les dades seguint el mètode de la "força bruta", és a dir, considerant totes les alternatives possibles. Agilitar els temps d'execució es pot aconseguir optimitzant la programació o bé, desenvolupant algorismes de càlcul més eficaços, si és que existeixen. En tot cas, es tracta d'un objectiu que queda fora de l'abast d'aquest projecte.
- Seria interessant ampliar el rang de procés de les aplicacions esmentades. En el cas de l'anàlisi de fraccions està limitat a un màxim de 4 termes. Això podria ampliar-se fàcilment a 5 o 6, sempre i quan es trobessin mecanismes per agilitar la recerca.
- Millorar el funcionament intern del programari perquè aportés resultats més precisos. En algunes aplicacions, per raons de temps, l'àmbit de la present recerca limita el càlcul del desenvolupament de fraccions a les obtingudes mitjançant l'algoritme voraç. Això provoca que en alguns casos obtinguem resultats diferents i no tan acurats com els dels papirs.<sup>16</sup> Tot i que incrementaria les dimensions i la complexitat del codi, la introducció d'un mòdul de càlcul de fraccions òptimes aportaria més precisió i rigor matemàtics als programes.
- Ampliar la llista de programes disponibles per poder abastar tots els àmbits tractats en els papirs: àlgebra, geometria... Es podria incloure la possibilitat de treballar amb nombres auxiliars vermells, així com calcular-los i mostrar la seva utilitat en les operacions desenvolupades.
- Implementar la visualització gràfica dels resultats. Això afegiria vistositat als programes en mostrar els càlculs i els resultats de les operacions amb nombres egipcis jeroglífics o hieràtics.

## 9.3. Consideracions finals

Tal com hem vist al llarg del treball, la matemàtica egípcia destaca pel seu caràcter pràctic i empíric. La documentació disponible es concentra en les habilitats aritmètiques sense remetre a un marc teòric. Així, als textos no hi trobem cap mena de demostracions de procediments, teoremes o axiomes, i ni tan sols es detallen les fórmules aplicades en els càlculs. Els textos se centren en les solucions i les comprovacions. Per això els historiadors de la matemàtica afirmen que l'evolució d'aquesta disciplina al llarg de la dilatada història d'Egipte va ésser mínima: alguns procediments emprats en els càlculs es feien d'una determinada manera perquè funcionaven satisfactòriament, mantenint-se en el temps fins que diversos segles després del Regne Nou va aparèixer en escena la matemàtica grega, amb el seu nou i innovador bagatge conceptual. Aquesta afirmació es dedueix de l'estudi dels escassos testimonis escrits que ens han arribat, i que cobreixen un dilatat horitzó temporal que deixa entreveure que, des de temps immemorials, es va formar els escribes de la mateixa manera i amb els mateixos textos.

---

<sup>16</sup> veure apartat 5.9, pàg. 24.

Partint del que revelen els principals papirs matemàtics (Rhind i Moscou) veiem que els egipcis coneixien les quatre operacions aritmètiques bàsiques: suma, resta, multiplicació i divisió, que realitzaven tant amb nombres enters com fraccionaris. Combinant aquestes operacions també van desenvolupar mètodes per calcular potències o realitzar arrels quadrades, procediments necessaris per als càlculs geomètrics d'àrees i volums de figures senzilles. Quant a l'àlgebra, estaven en disposició de resoldre equacions de primer i segon grau, així com sistemes d'equacions elementals. El fet que els documents que ens han arribat tinguin una finalitat pedagògica fa que no puguem parlar amb precisió sobre l'abast real de les habilitats matemàtiques dels escribes.

Els textos presenten col·leccions de problemes amb situacions i exemples quotidians, desenvolupats amb molt de detall i facilitant solucions comprovades i susceptibles de generalització. A més, el nivell de detall amb què es desenvolupen els càlculs demostra que la notació i els mètodes aritmètics eren força complicats, tret que s'accentua en el treball amb fraccions. Probablement servien de model perquè els estudiants, sota la tutela d'un mestre, poguessin exercitar-se amb el càlcul, aprendre els passos necessaris per afrontar la variada tipologia de situacions que es trobarien en la seva vida professional, i adquirissin les habilitats que els permetrien abordar nous supòsits.

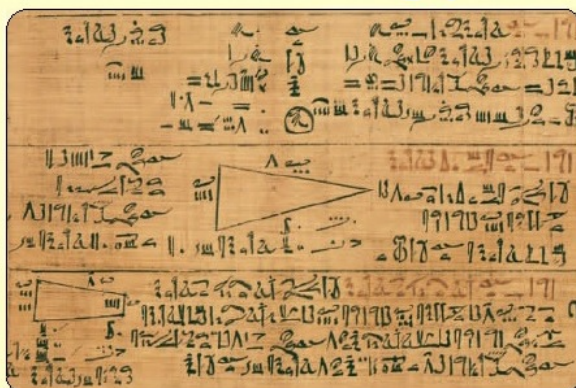
Els papirs esmentats, juntament amb altres testimonis epigràfics i altres documents científics relacionats, revelen que aquests coneixements es van desenvolupar en un estadi primerenc de la civilització egípcia i que ja es trobaven ben consolidats durant el Regne Mitjà. Així, ens trobem amb un corpus aritmètic pràctic més de mil anys abans de l'aparició de la matemàtica grega, i amb una evolució gairebé inexistent durant mil·lennis.

Malgrat l'escassetat testimonial que ens ha arribat, la documentació que sobreviu revela que el nivell assolit per la matemàtica egípcia s'ha de qualificar de modest. La manca de documentació sobre el tema fa que, tot i els testimonis dels autors grecs, la influència de la matemàtica egípcia sobre la grega sigui altament especulativa. De totes maneres, s'han de considerar les evidències literàries dins del seu context històric, amb una vinculació entre ambdues civilitzacions que cal remuntar als temps minoics i micènics. Així, doncs, és perfectament plausible que els precedents remots de la matemàtica grega participin en certa mesura de l'enginy i l'habilitat pràctica dels antics escribes egipcis.

## 10. Annexos

### 10.1. Plana inicial de la pàgina web associada

# Matemàtica egípcia



Programes corresponents al Treball Final de Màster:

#### Aproximació a la matemàtica egípcia: didàctica, aplicacions i mètodes.

Pere Garcia Ruiz — Màster de Mediterrània Antiga (UOC/UAB) — Curs 2015-2016

#### Lista de programes:

##### Aritmètica de nombres naturals

1. [Suma](#) Suma a la manera egípcia de dos nombres enters
2. [Resta](#) Calcula la resta egípcia de dos enters
3. [Multiplicació](#) Desenvolupa el mètode de multiplicació egípcia (enters)
4. [Divisió](#) Calcula la divisió egípcia (enters)
5. [Arrel quadrada](#) Possible mètode per calcular arrels quadrades

##### Aritmètica de fraccions

1. [Fraccions I](#) Calcula fraccions egípcies mitjançant l'*algoritme voraç*
2. [Fraccions II](#) Analitza en profunditat i calcula fraccions egípcies òptimes
3. [Suma fraccions](#) Suma dues fraccions complexes
4. [Resta fraccions](#) Resta dues fraccions complexes
5. [Multiplica fraccions I](#) Multiplica fraccions per un nombre enter
6. [Multiplica fraccions II](#) Multiplica dues fraccions complexes
7. [Divideix fraccions I](#) Divideix fraccions per un nombre enter
8. [Divideix fraccions II](#) Divideix dues fraccions complexes
9. [Calcula invers](#) Calcula l'invers d'una fracció  $[ a/b ]$  o complexa

##### Altres operacions

1. [Seked](#) Geometria de la piràmide i grau d'inclinació (*seked*)

#### Informació addicional:

1. [Anàlisi de la taula 2/n](#) Resultats de l'anàlisi detallada de la taula 2/n del papir Rhind
2. [Anàlisi d'altres taules](#) Resultats de l'anàlisi detallada d'altres taules: 9 primers nombres dividits per 10 (papir Rhind), taula de multiplicació de fraccions (problema 61 del papir Rhind) i *Rull de cuiro*
3. [Imatges papir Rhind](#) Imatges de diverses seccions del papir Rhind

#### Notes

1. La present pàgina web romandrà activa per temps indefinit
2. Per problemes de compatibilitat, **no s'utilitzen accents ni signes com ç** en els textos dels programes

## 10.2. Resultats tabulats de la recerca: anàlisi informàtica de la taula $2/n$ del papir Rhind

### 10.2.1 Temps de càlcul, desenvolupament Rhind i algoritme voraç

Anàlisi informàtica de la taula $2/n$ — 1. Fraccions del papir i càlculs algoritme voraç					
N	temps (s)	desenvolupament Rhind	suma	algoritme voraç	suma
3	0	$2/3 = 1/2 + 1/6$	8	$2/3 = 1/2 + 1/6$	8
5	0	$2/5 = 1/3 + 1/15$	18	$2/5 = 1/3 + 1/15$	18
7	0	$2/7 = 1/4 + 1/28$	32	$2/7 = 1/4 + 1/28$	32
9	0	$2/9 = 1/6 + 1/18$	24	$2/9 = 1/5 + 1/45$	50
11	0	$2/11 = 1/6 + 1/66$	72	$2/11 = 1/6 + 1/66$	72
13	1	$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$	164	$2/13 = 1/7 + 1/91$	98
15	2	$2/15 = 1/10 + 1/30$	40	$2/15 = 1/8 + 1/120$	128
17	5	$2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68$	131	$2/17 = 1/9 + 1/153$	162
19	9	$2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114$	202	$2/19 = 1/10 + 1/190$	200
21	12	$2/21 = 1/14 + 1/42$	56	$2/21 = 1/11 + 1/231$	242
23	21	$2/23 = 1/12 + 1/276$	288	$2/23 = 1/12 + 1/276$	288
25	31	$2/25 = 1/15 + 1/75$	90	$2/25 = 1/13 + 1/325$	338
27	40	$2/27 = 1/18 + 1/54$	72	$2/27 = 1/14 + 1/378$	392
29	60	$2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$	488	$2/29 = 1/15 + 1/435$	450
31	81	$2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155$	299	$2/31 = 1/16 + 1/496$	512
33	96	$2/33 = 1/22 + 1/66$	88	$2/33 = 1/17 + 1/561$	578
35	129	$2/35 = 1/30 + 1/42$	72	$2/35 = 1/18 + 1/630$	648
37	183	$2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296$	431	$2/37 = 1/19 + 1/703$	722
39	203	$2/39 = 1/26 + 1/78$	104	$2/39 = 1/20 + 1/780$	800
41	307	$2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328$	598	$2/41 = 1/21 + 1/861$	882
43	365	$2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301$	558	$2/43 = 1/22 + 1/946$	968
45	376	$2/45 = 1/30 + 1/90$	120	$2/45 = 1/23 + 1/1035$	1058
47	520	$2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470$	641	$2/47 = 1/24 + 1/1128$	1152
49	643	$2/49 = 1/28 + 1/196$	224	$2/49 = 1/25 + 1/1225$	1250
51	710	$2/51 = 1/34 + 1/102$	136	$2/51 = 1/26 + 1/1326$	1352
53	862	$2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795$	1143	$2/53 = 1/27 + 1/1431$	1458
55	988	$2/55 = 1/30 + 1/330$	360	$2/55 = 1/28 + 1/1540$	1568
57	1139	$2/57 = 1/38 + 1/114$	152	$2/57 = 1/29 + 1/1653$	1682
59	1485	$2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531$	803	$2/59 = 1/30 + 1/1770$	1800
61	1687	$2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610$	1382	$2/61 = 1/31 + 1/1891$	1922
63	1700	$2/63 = 1/42 + 1/126$	168	$2/63 = 1/32 + 1/2016$	2048
65	2064	$2/65 = 1/39 + 1/195$	234	$2/65 = 1/33 + 1/2145$	2178
67	2725	$2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536$	911	$2/67 = 1/34 + 1/2278$	2312
69	2652	$2/69 = 1/46 + 1/138$	184	$2/69 = 1/35 + 1/2415$	2450
71	3170	$2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710$	1318	$2/71 = 1/36 + 1/2556$	2592
73	3595	$2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365$	936	$2/73 = 1/37 + 1/2701$	2738
75	3806	$2/75 = 1/50 + 1/150$	200	$2/75 = 1/38 + 1/2850$	2888
77	4401	$2/77 = 1/44 + 1/308$	352	$2/77 = 1/39 + 1/3003$	3042
79	4876	$2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790$	1403	$2/79 = 1/40 + 1/3160$	3200
81	5203	$2/81 = 1/54 + 1/162$	216	$2/81 = 1/41 + 1/3321$	3362
83	6346	$2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498$	1305	$2/83 = 1/42 + 1/3486$	3528
85	6953	$2/85 = 1/51 + 1/255$	306	$2/85 = 1/43 + 1/3655$	3698
87	7456	$2/87 = 1/58 + 1/174$	232	$2/87 = 1/44 + 1/3828$	3872
89	8423	$2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890$	1840	$2/89 = 1/45 + 1/4005$	4050
91	9399	$2/91 = 1/70 + 1/130$	200	$2/91 = 1/46 + 1/4186$	4232
93	9626	$2/93 = 1/62 + 1/186$	248	$2/93 = 1/47 + 1/4371$	4418
95	10958	$2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570$	1010	$2/95 = 1/48 + 1/4560$	4608
97	12212	$2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$	1511	$2/97 = 1/49 + 1/4753$	4802
99	12259	$2/99 = 1/66 + 1/198$	264	$2/99 = 1/50 + 1/4950$	5000
101	14654	$2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$	1212	$2/101 = 1/51 + 1/5151$	5202

## 10.2.2 Resultats expressats en fraccions de 2 termes

Anàlisi informàtica de la taula 2/n — 2. Fraccions òptimes de dos termes					
N	total	òptima 2 termes	suma	òptima den. parells	suma
3	1	$2/3 = 1/2 + 1/6$	8	$2/3 = 1/2 + 1/6$	8
5	1	$2/5 = 1/3 + 1/15$	18	—	—
7	1	$2/7 = 1/4 + 1/28$	32	$2/7 = 1/4 + 1/28$	32
9	2	$2/9 = 1/6 + 1/18$	24	$2/9 = 1/6 + 1/18$	24
11	1	$2/11 = 1/6 + 1/66$	72	$2/11 = 1/6 + 1/66$	72
13	1	$2/13 = 1/7 + 1/91$	98	—	—
15	4	$2/15 = 1/12 + 1/20$	32	$2/15 = 1/12 + 1/20$	32
17	1	$2/17 = 1/9 + 1/153$	162	—	—
19	1	$2/19 = 1/10 + 1/190$	200	$2/19 = 1/10 + 1/190$	200
21	4	$2/21 = 1/15 + 1/35$	50	$2/21 = 1/14 + 1/42$	56
23	1	$2/23 = 1/12 + 1/276$	288	$2/23 = 1/12 + 1/276$	288
25	2	$2/25 = 1/15 + 75$	90	—	—
27	3	$2/27 = 1/18 + 1/54$	72	$2/27 = 1/18 + 1/54$	72
29	1	$2/29 = 1/15 + 1/435$	450	—	—
31	1	$2/31 = 1/16 + 1/496$	512	$2/31 = 1/16 + 1/496$	512
33	4	$2/33 = 1/22 + 1/66$	88	$2/33 = 1/22 + 1/66$	88
35	4	$2/35 = 1/30 + 1/42$	72	$2/35 = 1/30 + 1/42$	72
37	1	$2/37 = 1/19 + 1/703$	722	—	—
39	4	$2/39 = 1/26 + 1/78$	104	$2/39 = 1/26 + 1/78$	104
41	1	$2/41 = 1/21 + 1/861$	882	—	—
43	1	$2/43 = 1/22 + 1/946$	968	$2/43 = 1/22 + 1/946$	968
45	7	$2/45 = 1/36 + 1/60$	96	$2/45 = 1/36 + 1/60$	96
47	1	$2/47 = 1/24 + 1/1128$	1152	$2/47 = 1/24 + 1/1128$	1152
49	2	$2/49 = 1/28 + 1/196$	224	$2/49 = 1/28 + 1/196$	224
51	4	$2/51 = 1/34 + 1/102$	136	$2/51 = 1/34 + 1/102$	136
53	1	$2/53 = 1/27 + 1/1431$	1458	—	—
55	4	$2/55 = 1/40 + 1/88$	128	$2/55 = 1/40 + 1/88$	128
57	4	$2/57 = 1/38 + 1/114$	152	$2/57 = 1/38 + 1/114$	152
59	1	$2/59 = 1/30 + 1/1770$	1800	$2/59 = 1/30 + 1/1770$	1800
61	1	$2/61 = 1/31 + 1/1891$	1922	—	—
63	7	$2/63 = 1/56 + 1/72$	128	$2/63 = 1/56 + 1/72$	128
65	4	$2/65 = 1/45 + 1/117$	162	—	—
67	1	$2/67 = 1/34 + 1/2278$	2312	$2/67 = 1/34 + 1/2278$	2312
69	4	$2/69 = 1/46 + 1/138$	184	$2/69 = 1/46 + 1/138$	184
71	1	$2/71 = 1/36 + 1/2556$	2592	$2/71 = 1/36 + 1/2556$	2592
73	1	$2/73 = 1/37 + 1/2701$	2738	—	—
75	7	$2/75 = 1/60 + 100$	160	$2/75 = 1/60 + 100$	160
77	4	$2/77 = 1/63 + 99$	162	$2/77 = 1/44 + 1/308$	352
79	1	$2/79 = 1/40 + 1/3160$	3200	$2/79 = 1/40 + 1/3160$	3200
81	4	$2/81 = 1/54 + 1/162$	216	$2/81 = 1/54 + 1/162$	216
83	1	$2/83 = 1/42 + 1/3486$	3528	$2/83 = 1/42 + 1/3486$	3528
85	4	$2/85 = 1/55 + 187$	242	—	—
87	4	$2/87 = 1/58 + 174$	232	$2/87 = 1/58 + 174$	232
89	1	$2/89 = 1/45 + 1/4005$	4050	—	—
91	4	$2/91 = 1/70 + 1/130$	200	$2/91 = 1/70 + 1/130$	200
93	4	$2/93 = 1/62 + 186$	248	$2/93 = 1/62 + 186$	248
95	4	$2/95 = 1/60 + 228$	288	$2/95 = 1/60 + 228$	288
97	1	$2/97 = 1/49 + 1/4753$	4802	—	—
99	7	$2/99 = 1/90 + 110$	200	$2/99 = 1/90 + 110$	200
101	1	$2/101 = 1/51 + 1/5151$	5202	—	—

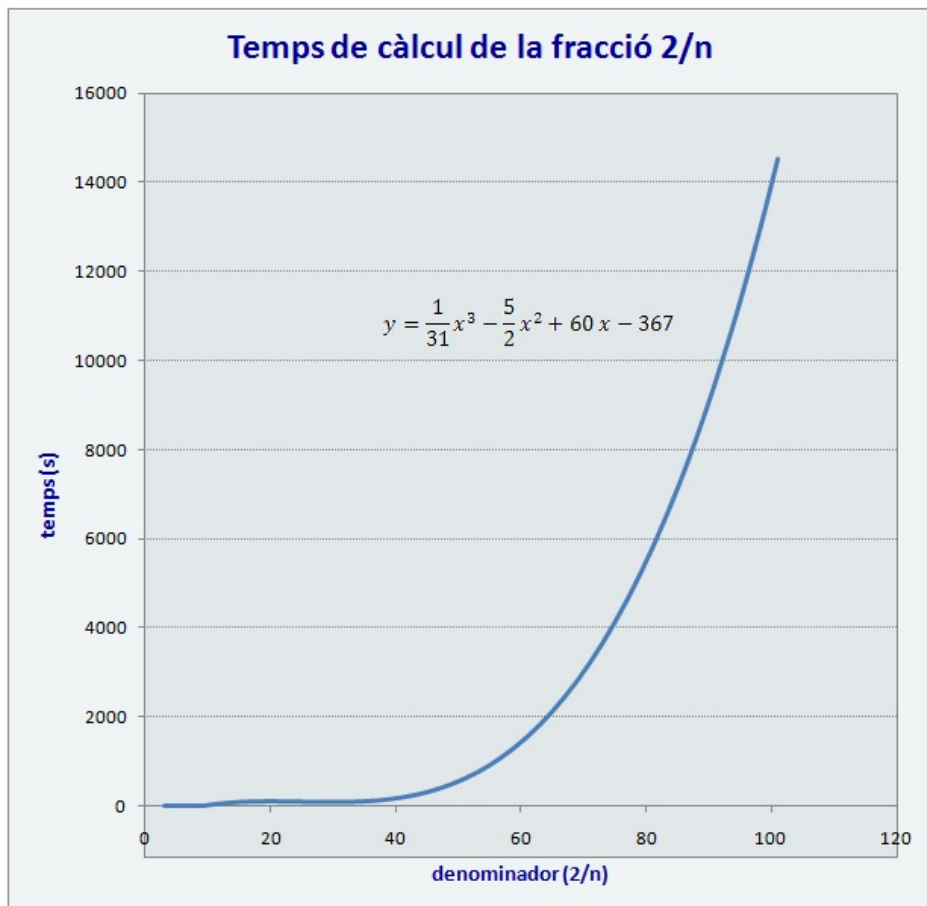
### 10.2.3 Resultats expressats en fraccions de 3 termes

Anàlisi informàtica de la taula 2/n — 3. Fraccions òptimes de tres termes					
N	total	òptima 3 termes	suma	òptima den. parells	suma
3	5	$2/3 = 1/3 + 1/4 + 1/12$	19	$2/3 = 1/2 + 1/8 + 1/24$	34
5	9	$2/5 = 1/4 + 1/12 + 1/15$	31	$2/5 = 1/4 + 1/10 + 1/20$	34
7	14	$2/7 = 1/6 + 1/14 + 1/21$	41	$2/7 = 1/6 + 1/12 + 1/28$	46
9	21	$2/9 = 1/10 + 1/15 + 1/18$	43	$2/9 = 1/8 + 1/18 + 1/24$	50
11	22	$2/11 = 1/10 + 1/15 + 1/66$	91	$2/11 = 1/8 + 1/24 + 1/66$	98
13	17	$2/13 = 1/10 + 1/26 + 1/65$	101	$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$	164
15	72	$2/15 = 1/20 + 1/21 + 1/28$	69	$2/15 = 1/18 + 1/20 + 1/36$	74
17	22	$2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68$	131	$2/17 = 1/12 + 1/34 + 1/204$	250
19	29	$2/19 = 1/14 + 1/38 + 1/133$	185	$2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114$	202
21	77	$2/21 = 1/24 + 1/35 + 1/40$	99	$2/21 = 1/24 + 1/28 + 1/56$	108
23	39	$2/23 = 1/21 + 1/28 + 1/276$	325	$2/23 = 1/20 + 1/30 + 1/276$	326
25	48	$2/25 = 1/24 + 1/40 + 1/75$	139	$2/25 = 1/20 + 1/50 + 1/100$	170
27	82	$2/27 = 1/30 + 1/45 + 1/54$	129	$2/27 = 1/24 + 1/54 + 1/72$	150
29	30	$2/29 = 1/24 + 1/40 + 1/435$	499	$2/29 = 1/20 + 1/58 + 1/580$	658
31	34	$2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155$	299	$2/31 = 1/24 + 1/48 + 1/496$	568
33	94	$2/33 = 1/30 + 1/70 + 1/77$	177	$2/33 = 1/24 + 1/88 + 1/132$	244
35	176	$2/35 = 1/42 + 1/55 + 1/66$	163	$2/35 = 1/40 + 1/56 + 1/70$	166
37	29	$2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296$	431	$2/37 = 1/20 + 1/370 + 1/740$	1130
39	151	$2/39 = 1/52 + 1/60 + 1/65$	177	$2/39 = 1/42 + 1/56 + 1/104$	202
41	37	$2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328$	598	$2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328$	598
43	37	$2/43 = 1/30 + 1/86 + 1/645$	761	$2/43 = 1/24 + 1/344 + 1/516$	884
45	220	$2/45 = 1/60 + 1/63 + 1/84$	207	$2/45 = 1/48 + 1/80 + 1/90$	218
47	57	$2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470$	641	$2/47 = 1/28 + 1/188 + 1/658$	874
49	80	$2/49 = 1/42 + 1/98 + 1/147$	287	$2/49 = 1/42 + 1/84 + 1/196$	322
51	138	$2/51 = 1/55 + 1/66 + 1/170$	291	$2/51 = 1/48 + 1/80 + 1/170$	298
53	39	$2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795$	1143	$2/53 = 1/36 + 1/106 + 1/1908$	2050
55	214	$2/55 = 1/72 + 1/88 + 1/90$	250	$2/55 = 1/72 + 1/88 + 1/90$	250
57	134	$2/57 = 1/60 + 1/76 + 1/190$	326	$2/57 = 1/60 + 1/76 + 1/190$	326
59	73	$2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531$	803	$2/59 = 1/48 + 1/80 + 1/1770$	1898
61	31	$2/61 = 1/36 + 1/244 + 1/1098$	1378	$2/61 = 1/36 + 1/244 + 1/1098$	1378
63	316	$2/63 = 1/78 + 1/91 + 1/126$	295	$2/63 = 1/72 + 1/88 + 1/154$	314
65	197	$2/65 = 1/78 + 1/104 + 1/120$	302	$2/65 = 1/78 + 1/104 + 1/120$	302
67	47	$2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536$	911	$2/67 = 1/36 + 1/804 + 1/1206$	2046
69	166	$2/69 = 1/84 + 1/92 + 1/161$	337	$2/69 = 1/48 + 1/184 + 1/368$	600
71	69	$2/71 = 1/42 + 1/426 + 1/497$	965	$2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710$	1318
73	34	$2/73 = 1/44 + 1/292 + 1/803$	1139	$2/73 = 1/40 + 1/584 + 1/1460$	2084
75	317	$2/75 = 1/100 + 1/110 + 1/132$	342	$2/75 = 1/100 + 1/110 + 1/132$	342
77	251	$2/77 = 1/99 + 1/112 + 1/144$	355	$2/77 = 1/84 + 1/132 + 1/154$	370
79	66	$2/79 = 1/54 + 1/158 + 1/2133$	2345	$2/79 = 1/42 + 1/948 + 1/2212$	3202
81	158	$2/81 = 1/90 + 1/135 + 1/162$	387	$2/81 = 1/72 + 1/162 + 1/216$	450
83	76	$2/83 = 1/45 + 1/830 + 1/1494$	2369	$2/83 = 1/60 + 1/140 + 1/3486$	3686
85	195	$2/85 = 1/90 + 1/153 + 1/170$	413	$2/85 = 1/80 + 1/136 + 1/272$	488
87	194	$2/87 = 1/87 + 1/116 + 1/348$	551	$2/87 = 1/84 + 1/116 + 1/406$	606
89	56	$2/89 = 1/48 + 1/1068 + 1/1424$	2540	$2/89 = 1/48 + 1/1068 + 1/1424$	2540
91	244	$2/91 = 1/120 + 1/130 + 1/168$	418	$2/91 = 1/120 + 1/130 + 1/168$	418
93	157	$2/93 = 1/93 + 1/124 + 1/372$	589	$2/93 = 1/60 + 1/310 + 1/620$	990
95	309	$2/95 = 1/114 + 1/133 + 1/210$	457	$2/95 = 1/110 + 1/132 + 1/228$	470
97	43	$2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$	1511	$2/97 = 1/56 + 1/388 + 1/5432$	5876
99	412	$2/99 = 1/132 + 1/144 + 1/176$	452	$2/99 = 1/132 + 1/144 + 1/176$	452
101	50	$2/101 = 1/60 + 1/404 + 1/1515$	1979	$2/101 = 1/56 + 1/808 + 1/1414$	2278

## 10.2.4 Resultats expressats en fraccions de 4 termes

Anàlisi informàtica de la taula 2/n — 4. Fraccions òptimes de quatre termes					
N	total	òptima 4 termes	suma	òptima den. parells	suma
3	61	$2/3 = 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15$	34	$2/3 = 1/2 + 1/12 + 1/20 + 1/30$	64
5	275	$2/5 = 1/6 + 1/9 + 1/15 + 1/18$	48	$2/5 = 1/6 + 1/10 + 1/12 + 1/20$	48
7	564	$2/7 = 1/10 + 1/14 + 1/15 + 1/21$	60	$2/7 = 1/8 + 1/12 + 1/24 + 1/28$	72
9	1079	$2/9 = 1/12 + 1/18 + 1/21 + 1/28$	79	$2/9 = 1/12 + 1/18 + 1/20 + 1/30$	80
11	1208	$2/11 = 1/12 + 1/22 + 1/33 + 1/44$	111	$2/11 = 1/12 + 1/20 + 1/30 + 1/66$	128
13	1377	$2/13 = 1/15 + 1/26 + 1/30 + 1/65$	136	$2/13 = 1/12 + 1/26 + 1/52 + 1/78$	168
15	4753	$2/15 = 1/21 + 1/30 + 1/35 + 1/42$	128	$2/15 = 1/20 + 1/24 + 1/42 + 1/56$	142
17	2391	$2/17 = 1/21 + 1/28 + 1/51 + 1/68$	168	$2/17 = 1/20 + 1/30 + 1/34 + 1/204$	288
19	2827	$2/19 = 1/19 + 1/38 + 1/57 + 1/114$	228	$2/19 = 1/20 + 1/30 + 1/76 + 1/114$	240
21	7447	$2/21 = 1/35 + 1/40 + 1/42 + 1/56$	173	$2/21 = 1/28 + 1/40 + 1/56 + 1/60$	184
23	4203	$2/23 = 1/23 + 1/46 + 1/69 + 1/138$	276	$2/23 = 1/20 + 1/46 + 1/92 + 1/230$	388
25	5901	$2/25 = 1/40 + 1/42 + 1/56 + 1/75$	213	$2/25 = 1/30 + 1/50 + 1/60 + 1/100$	240
27	10470	$2/27 = 1/45 + 1/54 + 1/55 + 1/66$	220	$2/27 = 1/42 + 1/54 + 1/56 + 1/72$	224
29	5648	$2/29 = 1/30 + 1/58 + 1/87 + 1/145$	320	$2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$	488
31	5017	$2/31 = 1/36 + 1/45 + 1/124 + 1/155$	360	$2/31 = 1/42 + 1/48 + 1/56 + 1/496$	642
33	12612	$2/33 = 1/55 + 1/66 + 1/70 + 1/77$	268	$2/33 = 1/40 + 1/66 + 1/88 + 1/110$	304
35	26111	$2/35 = 1/56 + 1/70 + 1/72 + 1/90$	288	$2/35 = 1/56 + 1/70 + 1/72 + 1/90$	288
37	5044	$2/37 = 1/37 + 1/74 + 1/111 + 1/222$	444	$2/37 = 1/30 + 1/74 + 1/222 + 1/370$	696
39	26663	$2/39 = 1/63 + 1/72 + 1/84 + 1/104$	323	$2/39 = 1/60 + 1/72 + 1/90 + 1/104$	326
41	8019	$2/41 = 1/41 + 1/82 + 1/123 + 1/246$	492	$2/41 = 1/42 + 1/56 + 1/246 + 1/328$	672
43	7055	$2/43 = 1/43 + 1/86 + 1/129 + 1/258$	516	$2/43 = 1/42 + 1/56 + 1/344 + 1/516$	958
45	36841	$2/45 = 1/78 + 1/90 + 1/91 + 1/105$	364	$2/45 = 1/80 + 1/84 + 1/90 + 1/112$	366
47	11027	$2/47 = 1/47 + 1/94 + 1/141 + 1/282$	564	$2/47 = 1/42 + 1/84 + 1/188 + 1/658$	972
49	16828	$2/49 = 1/78 + 1/91 + 1/98 + 1/147$	414	$2/49 = 1/70 + 1/80 + 1/112 + 1/196$	458
51	26779	$2/51 = 1/85 + 1/90 + 1/119 + 1/126$	420	$2/51 = 1/80 + 1/84 + 1/112 + 1/170$	446
53	10358	$2/53 = 1/53 + 1/106 + 1/159 + 1/318$	636	$2/53 = 1/42 + 1/106 + 1/318 + 1/742$	1208
55	51532	$2/55 = 1/88 + 1/110 + 1/120 + 1/132$	450	$2/55 = 1/88 + 1/110 + 1/120 + 1/132$	450
57	25766	$2/57 = 1/76 + 1/110 + 1/132 + 1/190$	508	$2/57 = 1/76 + 1/110 + 1/132 + 1/190$	508
59	16217	$2/59 = 1/59 + 1/118 + 1/177 + 1/354$	708	$2/59 = 1/44 + 1/132 + 1/354 + 1/1298$	1828
61	8684	$2/61 = 1/61 + 1/122 + 1/183 + 1/366$	732	$2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610$	1382
63	77445	$2/63 = 1/110 + 1/126 + 1/132 + 1/140$	508	$2/63 = 1/110 + 1/126 + 1/132 + 1/140$	508
65	59608	$2/65 = 1/117 + 1/120 + 1/136 + 1/153$	526	$2/65 = 1/110 + 1/130 + 1/132 + 1/156$	528
67	12618	$2/67 = 1/67 + 1/134 + 1/201 + 1/402$	804	$2/67 = 1/42 + 1/268 + 1/804 + 1/938$	2052
69	51553	$2/69 = 1/92 + 1/156 + 1/161 + 1/182$	591	$2/69 = 1/92 + 1/120 + 1/184 + 1/230$	626
71	17796	$2/71 = 1/71 + 1/142 + 1/213 + 1/426$	852	$2/71 = 1/72 + 1/90 + 1/568 + 1/710$	1440
73	9373	$2/73 = 1/73 + 1/146 + 1/219 + 1/438$	876	$2/73 = 1/56 + 1/146 + 1/584 + 1/1022$	1808
75	75259	$2/75 = 1/120 + 1/150 + 1/168 + 1/175$	613	$2/75 = 1/100 + 1/156 + 1/182 + 1/210$	648
77	80668	$2/77 = 1/132 + 1/154 + 1/156 + 1/182$	624	$2/77 = 1/132 + 1/154 + 1/156 + 1/182$	624
79	21153	$2/79 = 1/79 + 1/158 + 1/237 + 1/474$	948	$2/79 = 1/60 + 1/158 + 1/790 + 1/948$	1956
81	40764	$2/81 = 1/135 + 1/162 + 1/171 + 1/190$	658	$2/81 = 1/126 + 1/162 + 1/168 + 1/216$	672
83	21136	$2/83 = 1/83 + 1/166 + 1/249 + 1/498$	996	$2/83 = 1/72 + 1/120 + 1/830 + 1/1494$	2516
85	59332	$2/85 = 1/153 + 1/170 + 1/171 + 1/190$	684	$2/85 = 1/136 + 1/144 + 1/180 + 1/272$	732
87	62481	$2/87 = 1/120 + 1/145 + 1/232 + 1/290$	787	$2/87 = 1/116 + 1/156 + 1/182 + 1/406$	860
89	22722	$2/89 = 1/89 + 1/178 + 1/267 + 1/534$	1068	$2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890$	1840
91	74377	$2/91 = 1/144 + 1/168 + 1/208 + 1/234$	754	$2/91 = 1/144 + 1/168 + 1/208 + 1/234$	754
93	43883	$2/93 = 1/126 + 1/186 + 1/217 + 1/279$	808	$2/93 = 1/90 + 1/186 + 1/310 + 1/558$	1144
95	108563	$2/95 = 1/171 + 1/180 + 1/190 + 1/228$	769	$2/95 = 1/156 + 1/182 + 1/210 + 1/228$	776
97	15541	$2/97 = 1/97 + 1/194 + 1/291 + 1/582$	1164	$2/97 = 1/60 + 1/388 + 1/1164 + 1/1940$	3552
99	143703	$2/99 = 1/171 + 1/190 + 1/210 + 1/231$	802	$2/99 = 1/154 + 1/168 + 1/252 + 1/264$	838
101	20702	$2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$	1212	$2/101 = 1/88 + 1/154 + 1/808 + 1/1414$	2464

## 10.2.5 Temps de càlcul de la fracció 2/n



\* Càlculs realitzats en un ordinador  
Intel Pentium Quad Core 2500

**Total temps emprat (s):**

**142433**

39 h 33 m 53 s

## 11. Bibliografia

### 11.1. Articles especialitzats en matemàtiques

- BEECKMANS, Laurent (1993). "The splitting Algorithm for Egyptian Fractions". A: *Journal of Number Theory*, N° 43, 1993, pp. 173-185.
- COHEN, Robert (1973). "Egyptian Fraction Expansions". A: *Mathematics Magazine*, Vol. 46, No. 2, Mar.-Apr. 1973, pp. 76-80.
- GRAHAM, R.L. (2002). "Paul Erdős and Egyptian Fractions". A: *Bolyai Society Mathematical Studies*, N° 25, 2002, Budapest, pp. 289-309.
- HAGEDORN, Thomas R. (2000) "A proof of a conjecture on Egyptian Fractions". A: *The American Mathematical Monthly* (Mathematical Association of America), Vol. 107, No. 1, Jan. 2000, pp. 62-63.
- KARPINSKI, Louis (1923). "Michigan Mathematical Papyrus No. 621". A: *Isis, A Journal of the History of Science* No. 5, 1923, University of Chicago, pp. 20-25.
- KNORR, Wilbur (1982). "Techniques of fractions in ancient Egypt and Greece". A: *Historia Mathematica*, N° 9, 1982, pp. 133-171.
- RISING, Gerald (1974). "Egyptian use of unit fractions". A: *Historia Mathematica*, N° 1, 1974, pp. 93-94.
- TANNERY, Paul (1886). "Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas". A: *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale*, Vol. 32, 1886.
- ZAHRT, Kim R. W. (2000). "Thoughts on Ancient Egyptian Mathematics". A: *Undergraduate Research Journal*, Indiana University, Vol. 3 (2000), pp. 90-93.

### 11.2. Obres sobre matemàtiques, història de les matemàtiques i altres disciplines científiques

- ANGLIN, W.S. (1994). "*Mathematics, a concise history and philosophy*", Springer-Verlag, New York.
- BOYER, Carl Benjamin (1990). "*Storia della matematica*", Mondadori, Milano.
- BOYER, Carl Benjamin i MERZBACH, Uta (2011). "*A History of Mathematics*", John Wiley & Sons, New Jersey.
- BRASSARD, G. & BRATLEY, P. (1997). "*Fundamentos de algoritmia*". Prentice-Hall, Madrid.
- FRIBERG, Jöran (2005). "*Unexpected links between egyptian and babylonian mathematics*", World Scientific, Singapore.
- GHERVERGHESE, George (2011). "*The Crest of the Peacock. Non-European roots of Mathematics*", Princeton University Press, Princeton.
- HODGKIN, Luke (2005). "*A History of Mathematics. From Mesopotamia to Modernity*", Oxford University Press, New York.
- HOFFMAN, Paul (1998). "*The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*". Fourth Estate Limited, London.
- IFRAH, Georges (2007). "*Historia universal de las cifras*", ed. Espasa, Barcelona.
- KATZ, Victor (2009). "*A history of Mathematics*", Addison-Wesley, Boston.
- KATZ, Victor (ed) (2007). "*The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam, a Sourcebook*", Princeton University, Princeton.
- NEUGEBAUER, Otto (1969). "*The exact sciences in antiquity*", Dover Publications, New York.
- ROBERTSON, Christopher (2008). "*Fundamental Electrical and Electronic Principles*", Elsevier, Burlington.
- SPIEGEL, Murray R. (1968). "*Manual de fórmulas y tablas matemáticas*", Mc. Graw Hill, México.
- VERNET, Juan (1979). "*Estudios sobre historia de la ciencia medieval*". Editorial Bellaterra, Barcelona.
- TIPLER, Paul A. (2003). "*Física moderna*". Editorial Reverté, Barcelona.

### 11.3. Llibres i articles sobre matemàtica egípcia

- BUFFUM CHACE, Arnold (1927). “*The Rhind Mathematical Papyrus, Vol I*”, Mathematical Association of America, Oberlin.
- CLAGETT, Marshall (1999). “*Ancient Egyptian Science, vol III: Ancient Egyptian Mathematics*”, American Philosophical Society, Philadelphia.
- GILLINGS, Richard J. (1982). “*Mathematics in the Time of the Pharaohs*”, Dover Publications, Mineola, New York.
- IMHAUSEN, Annette (2006). “Ancient Egyptian Math, New Perspectives on Old Sources”. A: *Springer Science+Business Media*, Vol. 281, N° 1, 2006, pp. 19-27.
- IMHAUSEN, Annette (2003). “Egyptian Mathematical Texts and Their Contexts”. A: *Science in Context*, 16(3), 2003, pp. 367-389.
- RITTER, James (2000). “Egyptian mathematics”. A: *Selin, Helaine (ed), Mathematics across cultures*, Springer Science+Business Media, Dordrech, Netherlands.
- ROBINS, Gay i SHUTE, Charles (1987). “*The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*”, Dover Publications, New York.
- ROSSI, Corinna (2007). “*Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*”, Cambridge University Press, New York.

### 11.4. Obres d'autors clàssics grecollatins i llibres sobre Història antiga

- ARISTÓTELES (1994). “*Metafísica*” (trad. Tomás Calvo Martínez). Editorial Gredos, Madrid.
- DIÒGENES LAERCI (2014). “*Vides i doctrines dels filòsofs més il·lustres, volum I*” (trad. Sergi Grau). Fundació Bernat Metge, Barcelona.
- FLAVIO JOSEFO (1994). “*Autobiografia - Contra Apión*” (trad. Margarita Rodríguez de Sepúlveda). Editorial Gredos, Madrid.
- HERÒDOT (2001). “*Història, llibre II*” (trad. Manuel Balasch). Fundació Bernat Metge, Barcelona.
- HUSSON, Geneviève i VALBELLE, Dominique (1998). “*Instituciones de Egipto: de los primeros faraones a los emperadores romanos*”. Ed. Cátedra, Madrid.
- JÁMBLICO (2003). “*Vida pitagòrica - Protréptico*” (trad. Miguel Periago Lorente). Editorial Gredos, Madrid.
- KEMP, Barry J. (2004). “*El antiguo Egipto, anatomía de una civilización*”. Ed. Crítica, Barcelona.
- MORROW, G. (1970). “*Proclus: A commentary on the first book of Euclid's Elements*”. Princeton University Press, Oxford.
- OPPENHEIM, Leo (1977). “*Ancient Mesopotamia, portrait of a dead civilization*”. The University of Chicago Press, Chicago.
- PLATÓN (1988). “*Diálogos III. Fedón - Banquete - Fedro*” (trad. Carlos García Gual (*Fedón*), M. Martínez Hernández (*Banquete*) y E. Lledó Íñigo (*Fedro*)). Editorial Gredos, Madrid.
- PLUTARCO (1986). “*Banquete de los Siete Sabios*”. A: *Obras morales y de costumbres (Moralia) II* (trad. Concepción Morales Otal i José García López). Editorial Gredos, Madrid.
- SILVERMAN, David P. (1991). “*Divinity and Deities in Ancient Egypt*”. A: Shafer, Byron (Ed.) *Religion in ancient Egypt*, Cornell University Press, New York, pp. 7-87.